Seminar im Wintersemester 2001/2002
Spezielle Kapitel aus Gruppen- und Darstellungstheorie

Integration auf Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen

Christoph Wockel

11.02.2002

Vorbemerkungen

Im diesem Vortrag wird das Konzept zur Integration auf Mannigfaltigkeiten und insbesondere auf Lie-Gruppen vorgestellt und kurz anhand zweier Beispiele erläutert.

Literatur

[**1**] Christoph Müller, “Homogene Räume und Bahnräume”,
Seminarvortrag WS 2001/2002, TU Darmstadt

[**2**] Andreas Balser, “Transformationsgruppen”,
Seminarvortrag WS 2001/2002, TU Darmstadt

[**3**] Frank W. Warner, “Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups”,
Springer Verlag, 2000

[**4**] Anthony W. Knapp, “Lie-Grups Beyond an Introduction”,
Birkhäuser Verlag, 1998

4. Kapitel

Integration auf Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen

Zunächst beschäftigen wir uns mit den zur Konstruktion eines Maßes auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wichtigen Begriffen. Die Überlegungen führen auf den Begriff der n-Form auf einer Mannigfaltigkeit, die ein Maß auf M festlegen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

4.1 Formen auf Mannigfaltikeiten

Zur Motivation der Vogehensweise betrachten wir zunächst das orientierte Lebesguemaß eines von den Vektoren $X_1, \ldots, X_n$ aufgespannten Spates im $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (X_1, \ldots, X_n) \mapsto \det(X_1, \ldots, X_n)$$

Diese Abbildung ist *multilinear* und *alternierend*. Dies sollen die wesentlichen Eigenschaften von λ sein, und wir fordern entsprechende Eigenschaften ebenso von einem Maß, welches dem Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$ weitestgehend entspricht. Zusammen mit der Normierung

$$\lambda(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

legen diese Eigenschaften λ eindeutig fest.
Zunächst beschäftigen wir uns mit der Multilinearität. Das Tensorprodukt zweier Vektorräume V, W soll aus Vektoren (v, w) mit $v \in V$ und $w \in W$ bestehen, die bilinear von v und w abhängen sollen. Also nehmen wir den freien Vektorraum $F(V, W)$ (hier sind alle Vektoren aus $V \times W$ lin. unabh. Basisvektoren) und faktorisieren den nicht bilinearen Anteil heraus.

Definition: Tensorprodukt
Seien V, W Vektorräume. Wir betrachten in dem freien Vektorraum $F(V, W)$ die Untervektorräume

$$\begin{aligned}
&\ll \{(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) : v_1, v_2 \in V, w \in W\} \gg \\
&\ll \{(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) : v \in V, w_1, w_2 \in W\} \gg \\
&\ll \{(\alpha v, w) - \alpha(v, w) : v \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{R}\} \gg \\
&\ll \{(v, \alpha w) - \alpha(v, w) : v \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{R}\} \gg
\end{aligned}$$

und den davon erzeugten UVR $R(V,W)$. Wir definieren dann das *Tensorprodukt* von V und W als:

$$V \otimes W := F(V,W)/R(V,W)$$

und wir bezeichnen die (v,w) enthaltende Äquivalenzklasse mit $v \otimes w$. $\triangleright$

Satz 4.1 (Eigenschaften des Tensorproduktes) *Für $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ \alpha(v \otimes w) &= (\alpha v \otimes w) = (v \otimes \alpha w)\end{aligned}$$

Das Tensorprodukt hat die folgende universelle Eigenschaft:
Ist $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ die bilineare Abbildung $(v,w) \mapsto v \otimes w$ und $f : V \times W \to U$ bilinear, so existiert genau eine lineare Abbildung $\tilde{f} : V \otimes W \to U$, so dass $f = \tilde{f} \circ \varphi$ gilt. Ist $\tilde{\varphi} : V \times W \to X$ bilinear, so dass für beliebige bilineare Abbildung $l : V \times W \to U$ eine eindeutige lineare Abb. $\tilde{l} : X \to U$ mit $l = \tilde{l} \circ \tilde{\varphi}$ existiert, so ist $X \cong V \otimes W$.

Die Vektoren des Tesorproduktes hängen also bilinear von ihren Vertretern ab.

Definition: Tensoralgebra, Äusseres Produkt
Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension. Dann ist

$$\begin{aligned}V_k &= \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k-mal} \\ C(V) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} V_k\end{aligned}$$

die *Tensoralgebra* von V. Sie ist eine assozialtive Algebra bezüglich $\otimes$. Wir betrachten in $C(V)$ die Ideale

$$\begin{aligned}I(V) &:= \ll \{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k : k \in \mathbb{N}, v_i = v_j \text{ für ein } i \neq j\} \gg \\ I_k(V) &:= I(V) \cap V_k\end{aligned}$$

und faktorisieren sie aus $C(V)$ heraus

$$\begin{aligned}\Lambda(V) &:= C(V)/I(V) \\ \Lambda^k(V) &:= V_k/I_k \text{ falls } k \geq 2 \\ \Lambda^1(V) &:= V \text{ und } \Lambda^0(V) := \mathbb{R}\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ enthaltende Äquivalenzklasse mit $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ und die Multiplikation $\wedge$ als *äußeres Produkt.* Insbesondere ist $\Lambda(V)$ eine assoziative Algebra bezüglich $\wedge$. $\triangleright$

Wir erhalten somit $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = 0$ wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind (beachte hierzu die Multilinearität von $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$).

Satz 4.2 (Eigenschaften des Äusseren Produktes) *Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension d. Für $s \in \Lambda^k(V)$ und $t \in \Lambda^l(V)$ gilt $s \wedge t = (-1)^{kl} t \wedge s$. D.h. die Abbildung $\varphi : V \times \cdots \times V \to \Lambda^k(V)$ $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ ist alternierend. Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so ist $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ eine Basis von $\Lambda(V)$, wobei $\{i_1, \ldots, i_k\}$ über alle Teilmengen von $\{1, \ldots, d\}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$ läuft und $e_\emptyset := 1$ gilt. Insbesondere ist*

$$\Lambda^d(V) \cong \mathbb{R} \text{ und } \Lambda^k(V) = \{0\} \text{ für } k > d$$

Das äußere Produkt hat die folgende universelle Eigenschaft:
Ist $\varphi : V \times \cdots \times V \to \Lambda^k(V)$ die obige alternierende multilineare Abb. und $f : V \times \cdots \times V \to U$ alternierend und multilinear, so ex. genau eine lineare Abb. $\tilde{f} : \Lambda^k(V) \to U$, so dass $f = \tilde{f} \circ \varphi$ gilt. Ist $\tilde{\varphi} : V \times \cdots \times V \to X$ alternierend und multilinear, so dass für beliebige alternierende multilineare Abb. $l : V \times \cdots \times V \to U$ eine eindeutige lineare Abb. $\tilde{l} : X \to U$ mit $l = \tilde{l} \circ \tilde{\varphi}$ ex., so ist $X \cong \Lambda^k(V)$.

Den zusammenhang zwischen alternierenden Abbildungen und alternierenden Produkten besteht darin, dass diese in einer natürlichen Beziehung zueinander stehen. Im Folgenden bezeichne $A^k(V)$ den Vektorraum der multiliearen alternierenden Abbildungen mit k Argumenten. Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{\varphi} : V^\star \times \cdots \times V^\star \to A^k(V) \quad \tilde{\varphi}(v_1^\star, \ldots, v_k^\star)(x_1, \ldots, x_k) = \det(v_i^\star(x_j))$$

Nach Satz 1.2 gilt somit für einen jeden endlichdimensionalen Vektorraum V

$$\Lambda^k(V^\star) \cong A^k(V)$$

und wir werden im weitern die Elemente von $\Lambda^k(V^\star)$ immer mit denen aus $A^k(V)$ identifizieren.

Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir betrachten eine Abbildung ω, die jedem $p \in M$ eine multlineare alternierende Abbildung auf T_pM zuordnet, also $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM^\star)$ mit $k \leq n$. Ist $(X_p^\star)^1, \ldots, (X_p^\star)^n$ eine Basis in $T_pM^\star$, so gilt nach Satz 1.2

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} w^{i_1, \ldots, i_k} (X_p^\star)^{i_1} \wedge \cdots \wedge (X_p^\star)^{i_k} \tag{4.1}$$

wobei über alle Teilmengen $\{i_1, \ldots, i_k\}$ von $\{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$ summiert wird. Auf einer Umgebung U_p von p, auf der Vektorfelder $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit $\alpha_i(p) = (X_p)_i$ existieren (also z.B. die Koordinatenumgebungen U_i mit $\partial_i, \ldots, \partial_n$) können wir die $w^{i_1, \ldots, i_r} : U_p \to \mathbb{R}$ als reelle Funktionen auffassen.

Definition: Koeffizientenfunktionen, k-Form
Eine Abbildung ω, die jedem Punkt $p \in M$ ein Element aus $\Lambda^k(V)$ zuordnet, so dass um jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung existiert, so dass alle *Koeffizientenfunktionen* $w^{i_1, \ldots, i_k} : U_p \to \mathbb{R}$ aus (1.1) differenzierbare Abbildungen sind, heißt (differenzierbare) *k-Form* auf M. ▷

Auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n sind auch die Tangentialräume n-dimensional, also hat eine n-Form nur eine Koeffizientenfunktion. Haben wir eine k-Form auf M, so wollen wir auch diese mit Hilfe der Koordinatenabbildungen in den $\mathbb{R}^n$ übertragen. Dazu bedienen wir uns wieder des Differentials der Koordinatenabbildungen.

Definition: pull back, push forward
Sei $\lambda : M \to N$ ein Diffeomorphismus mit dem Differential $d\lambda_p : T_pM \to T_{\lambda(p)}N$, α ein Vektorfeld auf M und ω eine k-Form auf N Dann heißt das durch

$$\lambda_\star(\alpha)(\lambda(p)) = d\lambda_p(\alpha(p))$$

definierte Vektorfeld auf N der *push forward* von α und die durch

$$\lambda^\star(\omega)(p)(\cdot,\ldots,\cdot) = \omega(\lambda(p))(d\lambda_p(\cdot),\ldots,d\lambda_p(\cdot))$$

definierte k-Form auf M der *pull back* von ω. ▷

Wir kommen jetzt zu der Eigenschaft von n-Formen, die sie uns zur Festlegung eines Maßes plausibel machen. Sie verhalten sich unter Parametertransformation nämlich so, wie wir es von von dem Lebesguemaß aus dem $\mathbb{R}^n$ kennen.

Satz 4.3 (Parametertransformationen von n-Formen)
Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n,

$$\varphi_1 : U_1 \to \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^n, p \mapsto \varphi_1(p) = (x^1(p),\ldots,x^n(p))$$
$$\varphi_2 : U_2 \to \varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^n, p \mapsto \varphi_2(p) = (y^1(p),\ldots,y^n(p))$$

zwei Koordinatensysteme von M und ω eine n-Form mit der lokalen Darstellung

$$(\varphi_1^{-1})^\star(\omega|_{U_1})(x) = w_1(x^1,\ldots,x^n)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$$

und analog für $\omega|_{U_2}$. Dann gilt für $x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ und $y = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$

$$w_1(x)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \underbrace{w_1(y)\det(\frac{\partial x}{\partial y})}_{=w_2(y)}(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)$$

D.h. die Komponentenfunktionen von n-Formen transformieren sich mit der Funktionaldeterminante der Koordinatenwechsel.

Beweis: Wir kennen bereits das Transformationsverhalten der Koordinatendifferentiale: $dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$. Damit ergibt sich mit $x(y) = \varphi_1(\varphi_2^{-1}(x))$

$$\begin{aligned}
&w_1(x)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)\\
=&w_1(x(y))\left(\sum_{i_1}\frac{\partial x^1}{\partial y^{i_1}}dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{i_n}\frac{\partial x^n}{\partial y^{i_n}}dy^{i_n}\right)\\
=&w_1(x(y))\sum_{i_1}\frac{\partial x^1}{\partial y^{i_1}}\cdots\sum_{i_n}\frac{\partial x^n}{\partial y^{i_n}}(dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_n})\\
=&w_1(x(y))\left(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{\partial x^1}{\partial y^{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial x^n}{\partial y^{\sigma(n)}}\right)(dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)\\
=&w_1(x(y))\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)(dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)
\end{aligned}$$

□

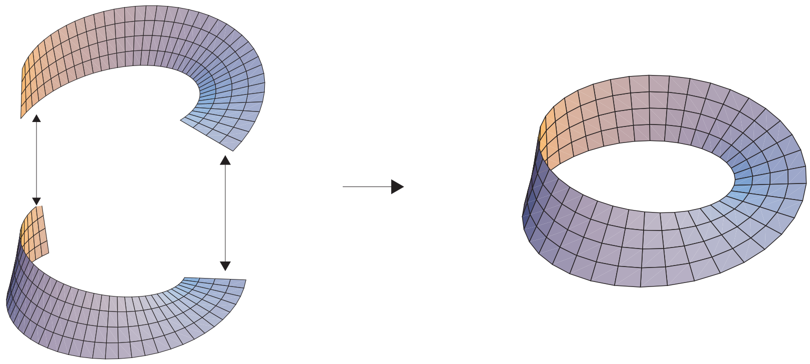

Abbildung 4.1: Ein Möbiusband als eine aus zwei Streifen zusammengesetzte Mannigfaltigkeit

4.2 Konstruktion des Integrals

Wir haben fast alle wichtigen Werkzeuge zur Integration zusammen, was noch fehlt, ist der Begriff der Orientierbarkeit.

Definition: orientierbar, Orientierung
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir nennen M *orientierbar*, falls ein Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ existiert, so dass das Differential der Koordinatenwechsel orientierungserhaltend ist:

$$\det(d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})) > 0 \tag{4.2}$$

für alle $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq 0$.
Zwei Atlanten $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ und $(U_j, \varphi_j)_{j\in J}$ heißen *kompatibel*, falls (1.2) für alle $i, j \in I \cup J$ mit $U_i \cap U_j \neq 0$ gilt. Aus der Kettenregel und der Multiplikativität der Determinante folgt dann, dass Kompatibilität eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Atlanten ist. Eine *Orientierung* auf M ist eine Wahl einer Äquivalenzklasse der Kompatibilität.
Damit umfasst eine Orientierung einen bestimmten Atlas, welcher die Orientierung festlegt, sowie alle Atlanten, die zu diesem Atlas kompatibel sind. ▷

Beispiel 4.4 *Ein Beispiel für eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit ist das Möbiusband. Es besteht aus zwei quasi verkehrt herum zusammengeklebten Streifen:* $\varphi_1(U_1) =]0,2[\times]0,1[$ *und* $\varphi_2(U_2) =]2,4[\times]0,1[$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} :]0,2[\times]0,1[\ \to]2,4[\times]0,1[$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x+2, y) & \textit{falls } x < 1 \\ (x+2, 1-y) & \textit{falls } x > 1 \end{cases}$$

Hier macht es keinen Sinn von zwei Seiten zu reden, im Gegensatz z.B. zur 2-Sphäre.

DEFINITION: POSITIVITÄT EINER n-FORM
Sei M eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine n-Form ω auf M heißt positiv bezüglich der Orientierung $[(U_i, \varphi_i)_{i\in I}]$, falls in

$$(\varphi_i^{-1})^\star(\omega|_{U_i})(x) = w_i(x^1, \dots, x^n)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k)$$

die Koeffizientenfunktionen $w_i : \varphi_i(U_i) \to \mathbb{R}$ für alle $i \in I$ positiv sind. Die Wohldefiniertheit folgt aus Satz 1.3. $\triangleright$

Der Zusammenhang zwischen der Orientierbarkeit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M der Dimension n und den positiven n-Formen auf M wird sofort an dem folgenden Satz deutlich. Zunächst benötigen wir noch den folgenden Begriff.

DEFINITION: ZERLEGUNG DER EINS
Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M. Dann heißt eine Familie von Abbildungen $(\psi_i)_{i\in I}$ $\psi_i : M \to [0,1]$ eine *Zerlegung der Eins* bezüglich der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$, falls

- $\mathrm{supp}(\psi_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$.
- für alle $i \in I$ gilt $\mathrm{supp}(\psi_i) \cap U_j \neq \emptyset$ für nur endlich viele $j_1, \dots, j_n$.
- $\sum_i \psi_i = 1$

$\triangleright$

Aufgrund der Abzählbarkeit der Topologie existiert bezüglich jeder offenen Überdeckung eine solche Zerlegung, sogar so, dass alle ψ_i differenzierbar sind.

Satz 4.5 *Hat M die Dimension n, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *M ist orientierbar*
- *es existiert eine n-Form ω auf M, so dass für einen Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ alle Koeffizientenfunktionen ω_i positiv sind.*

Beweis:
"$\Rightarrow$": Wir wählen eine durch $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ festgelegte Orientierung auf M mit Karten $\varphi_i(p) = (x_i^1(p), \dots, x_i^n(p))$. Sei $(\gamma_i)_{i\in I}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$. Dann ist

$$\omega(p) = \sum_{i\in I:\gamma_i(p)\neq 0} \gamma_i(p)\varphi_i^\star(dx_i^1(p) \wedge \cdots \wedge dx_i^n(p))$$

eine globale n-Form auf M. Wir wählen aus dem Altas ein Koordinatensystem $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(p) = (y^1(p), \dots, y^n(p))$. Da sowohl $\gamma_i \geq 0$, als auch $\det(\frac{\partial x_i}{\partial y}) > 0$ gilt, ist für $y \in \varphi_i(U \cap U_i)$

$$(\varphi^{-1})^\star(\omega|_U)(y) = \sum_{i:\tilde{\gamma}_i\neq 0} \tilde{\gamma}_i \circ \varphi^{-1}(y^1, \dots, y^n) \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)$$

eine globale n-Form mit positiven Koeffizientenfunktionen.
"$\Leftarrow$": Folgt direkt aus Satz 1.3 $\square$

Nun können wir das Integral einer Funktion mit kompaktem Träger auf einer Mannigfaltigkeit M definieren. Dazu gehen wir in der üblichen Weise vor, es zunächst für n-Formen, deren Träger komplett in einer Koordinatenumgebung liegt, zu definieren, um es dann mit Hilfe einer Zerlegung der Eins über ganz M zu definieren.

DEFINITION: INTEGRAL EINER DIFFERENTIALFORM
Sei M eine differenzierbare orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n, $[(\varphi_i, U_i)_{i\in I}]$ eine Orientierung auf M und ω eine n-Form mit $\text{supp}(\omega) \subseteq U_i$ für ein $i \in I$. Dann hat ω die lokale Darstellung

$$(\varphi_i^{-1})^\star(\omega|_{U_i})(x) = w_i(x)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$$

und für eine beschränkte meßbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $\text{supp}(f) \subseteq U_i$ kompakt definieren wir

$$\int_{U_i} f\,\omega := \int_{\varphi_i(U_i)} (f \circ \varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n)\; w_i(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \ldots dx^n$$

Ferner sei $(\psi_i)_{i\in I}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich der offenen Überdeckung $U_{i\in I}$ von M. Dann gilt für eine beliebige n-Form ω die Beziehung $\text{supp}(\psi_i\ \omega) \subseteq U_i$, und wir definieren für eine beschränkte meßbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger

$$\int_M f\,\omega = \sum_i \int_{U_i} f\,\psi_i\,\omega$$

▷

Das Integral hängt natürlich von der gewählten Orientierung ab. Die Wohldefiniertheit des Integrals bei fester Orientierung ergibt sich aus der Transformationsformel im $\mathbb{R}^n$ und Satz 1.3. Ist $\text{supp}(f) \subseteq U_i \cap U_j$, so ist

$$\begin{aligned}
\int_{U_i} f\,\omega &= \int_{\varphi_i(U_i\cap U_j)} (f \circ \varphi_i^{-1})(x^1, \ldots, x^n)\; w_i(x^1, \ldots, x^n)\; dx^1, \ldots, dx^n \\
&= \int_{\varphi_j(U_i\cap U_j)} f \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y^1, \ldots, y^n) \times \\
&\quad \times w_i \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y^1, \ldots, y^n) \left|\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\right| dy^1 \ldots dy^n
\end{aligned}$$

Da die Determinante der Koordinatenwechsel positiv ist, können wir die Betragsstriche weglassen und erhalten somit

$$\int_{U_i} f\,\omega = \int_{\varphi_j(U_i\cap U_j)} f \circ \varphi_j^{-1}\; w_j\; dy^1 \ldots dy^n = \int_{U_j} f\,\omega$$

Natürlich erhalten wir für jede n-Form ω ein Maß μ_ω, auf den Borelmengen von M, indem wir charakteristische Funktionen integrieren. In diesem Kontext schreibt man auch $\int_M f\omega = \int_M f d\mu_\omega$.

4.3 Lie-Gruppen und das Haarsche Maß

Wir wenden uns nun der Integration auf Lie-Gruppen zu. Eine Lie-Gruppe ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer glatten Gruppenmultiplikation und -inversion. Zunächst stellen wir fest, dass jede Lie-Gruppe orientierbar ist.

Definition: linksinvariante k-Form
Sei G eine Lie-Gruppe und $\lambda_m : G \to G\ g \mapsto mg$ die Linksmultiplikation mit $m \in G$. Dann ist λ_m ein Diffeomorphismus, und wir erhalten für eine k-Form ω eine nach links verschobene k-Form

$$\lambda_m^\star(\omega)(\cdot, \dots, \cdot) = \omega(d\lambda_m(\cdot), \dots, d\lambda_m(\cdot))$$

(vgl. Definition des pull backs). Eine k-Form ω heißt *linksinvariant*, falls $\lambda_m^\star(\omega) = \omega$ für alle $g \in G$; analog definiert man *rechtsinvariante* k-Formen. ▷

Linksinvariante k-Formen sind also so gemacht, dass sie auf linksinvarianten Vektorfeldern konstant sind.
Sei nun G eine Lie-Gruppe der Dimension n. Wir konstruieren eine linksinvariante n-Form auf G. Dazu sei zunächst daran erinnert, dass T_eG isomorph ist zu $\mathfrak{g}$, dem Raum der linksinvarianten Vektorfelder auf G. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Basis in T_eG, $X_1^\star, \dots, X_n^\star$ die zugehörige duale Basis von $T_eG^\star$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die zugehörigen linksinvarianten Vektorfelder. Dann definieren wir für $X_g \in T_gG$ mit

$$\omega_i(X_g) = X_i^\star(d\lambda_{g^{-1}}(X_g))$$

eine linksinvariante 1-Form auf G, da nach Konstruktion der α_j

$$\lambda_m^\star(\omega_i)(\alpha_j(g)) = \omega_i(d\lambda_m(\alpha_j(g)) = \omega_i(\alpha_j(mg))$$

gilt. Wegen $\omega_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ ist

$$\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \tag{4.3}$$

eine *nichtverschwindende* linksinvariante n-Form und wir erhalten so eine Orientierung auf G. Wir haben also den ersten Teil des folgenden Satzes gezeigt.

Satz 4.6 *Jede Lie-Gruppe ist orientierbar und das von ω induzierte Borelmaß μ_ω auf G ist linksinvariant.*

Beweis: Sei ω wie in (1.3), insbesondere linksinvariant. Dann ist für $f : G \to \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar mit $\operatorname{supp}(f)$ kompakt

$$\begin{aligned}\int_G f(g)d\mu_\omega(g) &= \int_G f\ \omega = \int_G (f \circ \lambda_m)\lambda_m^\star(\omega) \\ &= \int_G (f \circ \lambda_m)\omega = \int_G f(mg)d\mu_\omega(g)\end{aligned}$$

Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt dann die Linksinvarianz des Maßes. □

Analog erhalten wir auf jeder Lie-Gruppe ein rechtsinvariantes Maß, indem wir von der Rechtsmultiplikation $\rho_m : G \to G\ g \mapsto gm$ ausgehen. Auf kompakten Lie-Gruppen können wir also alle stetigen Funktionen integrieren. Wir können somit einen Mittelungsprozeß durchführen, der uns bereits bei endlichen Gruppen aus einer beliebigen Darstellung eine unitäre Darstellung gemacht hat. Das gleiche funktioniert auch für kompakte Lie-Gruppen.

Beispiel 4.7 *Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $\pi : G \to Aut(H)$ eine Darstellung von G auf einem Hilbertraum H mit dem Skalarpodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann definiert*

$$\langle u, v \rangle_\pi := \int_G \langle \pi(g)u, \pi(g)v \rangle d\mu(g)$$

ein Skalarprodukt auf H, für das wegen der Rechtsinvarianz von μ

$$\begin{aligned} \langle \pi(m)u, \pi(m)v \rangle_\pi &= \int_G \langle \pi(g)\pi(m)v, \pi(g)\pi(m)v \rangle d\mu(g) \\ &= \int_G \langle \pi(gm)u, \pi(gm)v \rangle d\mu(gm) = \langle u, v \rangle_\pi \end{aligned}$$

gilt.