Seminar im Wintersemester 2001/2002
Spezielle Kapitel aus Gruppen- und Darstellungstheorie

Grundlagen über Mannigfaltigkeiten

Christoph Wockel

21.01.2002

Vorbemerkungen

In diesem Vortrag werden die Grundlagen der Differentialgeometrie vorgestellt, insofern sie für die Vortragsserie von Interesse sind. Dies soll nur eine knappe Einführung sein, so dass Beweise ausgelassen werden, die sich in aber in jedem Buch über Differentialgeometrie wiederfinden.

Literatur

[**1**] Wolfgang Kühnel, "Differentialgeometrie",
Vieweg Verlag, 1999

[**2**] Klaus Jänich, "Vektoranalysis",
Springer Verlag, 2001

1. Kapitel

Grundlagen über Mannigfaltigkeiten

1.1 Mannigfaltigkeiten

In der Art, wie topologische Räume einen Kontext zur Verallgemeinerung des Begriffs der Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$ liefern, dienen Mannigfaltigkeiten einer Verallgemeinerung des Begriffs der Differenzierbarkeit. Allerdings kommen wir hier letzen Endes nicht ohne einen Vektorraum aus, da die Definition der Differenzierbarkeit nicht nur den Begriff der Konvergenz erfordert, sondern (für $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

$$df : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad X_p := (p, X) \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{f(p) - f(p + tX)}{t}$$

auch die Vektorraumstruktur wichtig ist. Schließlich soll ja df_p eine lineare Approximation von f Darstellen. Im endlichdimensionalen wird der Vektorraum, auf den man sich bezieht, natürlich wieder der $\mathbb{R}^n$ sein.
Zunächst erinnern wir an den Begriff der Teilmannigfaltigkeit, wie er aus der Grundvorlesung Analysis bekannt sein dürfte. Wir stellen uns eine Teilmannigfaltigkeit als Teil eines differenzierbar verformten $\mathbb{R}^n$ vor, der in einem $\mathbb{R}^m$ mit $n \leq m$ liegt:

Definition: Teilmannigfaltigkeit
$M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *Teilmannigfaltigkeit* der Dimension $n \leq m$, wenn für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U_p \subseteq \mathbb{R}^m$ und ein Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ existiert, so dass $\varphi_p(M \cap U_p) = (\mathbb{R}^n \times 0) \cap \varphi_p(U_p)$. Die φ_p heißen Karten von M. Die Menge aller Karten $\{\varphi_p : p \in M\}$ heißt ein Atlas von M. $\triangleright$

Einfache Beispiele für Teilmannigfaltigkeiten sind der $\mathbb{R}^m$ selbst, sowie die Einheitssphären $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Als sehr nützliches Werkzeug zum Arbeiten mit Teilmannigfaltigkeiten stellt sich der folgende Rangsatz heraus:

Satz 1.1 (Rangsatz) *Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^s-Abbildung und hat f in einer Umgebung U_p von $p \in \mathbb{R}^n$ konstanten Rang $r = rk(df(x))$, so gibt es Umgebungen V von p und W von $f(p)$, sowie C^s-Diffeomorphismen $\varphi : V \longrightarrow \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi : W \longrightarrow \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ die folgende Gestalt besitzt:*

$$\widetilde{f} : \varphi(V) \longrightarrow \psi(W), \quad \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

Aus dem Rangsatz ergeben sich unmittelbar zwei Folgerungen, die zur Charakterisierung von Teilmannigfaltigkeitenen dienen:

Folgerung 1.2 *Hat $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ konstanten Rang r, dann ist $f(U)$ lokal eine r-dim. Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, d.h. für alle $p \in U$ ex. eine Umgebung $V_p \subseteq U$, so dass $f(V_p)$ eine Teilmannigfaltigkeit ist.*

Folgerung 1.3 *Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ von konstantem Rang r, so ist $f^{-1}(a)$ eine $(n-r)$-dim. Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ für alle $a \in \mathbb{R}^m$.*

Beispiel 1.4 *Die 2-Sphäre hat die Form $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Die Abbildung Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ ist vom Rang 1. Damit ist $S^2 = f^{-1}(1)$ eine 2-dim. Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.*
Analog ist $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ eine $(n-1)$-dim. Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Betrachtet man Teilmannigfaltigkeitenen genauer, so sieht man, dass der umgebende Raum keine wesentliche Struktur beisteuert. Wesentlicher ist, dass die einzelnen Kartenumgebungen durch die Kartenabbildungen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Die 2-Sphäre S^2 besteht z.B. aus den zwei (in der Topologie der Teilmannigfaltigkeit) offenen Mengen $O := S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ und $U := S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ und dem entsprechenden Koordinatenwechsel $\varphi_O \circ \varphi_U^{-1} : U \to O$. Ausgehend von dieser Beobachtung definieren wir eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition: Differenzierbare Mannigfaltigkeit
Sei M ein Hausdorffraum mit einer abzählbaren Topoliogie. Eine Familie $\Omega = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, $U_i \subseteq M$, $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, mit

- U_i ist offen in M und $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
- $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus. (insbesondere ist $\varphi_i(U_i)$ offen in $\mathbb{R}^n$).
- Für $i, j \in I$ ist

  $$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

  eine C^∞-Abbildung in $\mathbb{R}^n$.

heißt *Atlas* auf M, oder auch *differenzierbare Struktur*. Ist Ω maximal mit diesen Eigenschaften, so heißt das Paar (M, Ω) *differenzierbare Mannigfaltigkeit* der Dimension n. Die Abbildungen φ_i heißen *Koordinatensysteme* oder *Koordinatenabbildungen* und die Mengen U_i *Koordinatenumgebungen.* ▷

Da wir im folgenden weitestgehend mit beliebig oft differenfierbaren Funktionen arbeiten werden, verstehen wir differenzierbar als beleibig oft differenzierbar. Sollten wir davon abweichen, werden wir es explizit erwähnen.

1.2 Der Tangentialraum

Um lineare Approximationen (Ableitungen) von Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ behandeln zu können, benötigen wir einen linearen Raum, den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit. Für Teilmannigfaltigkeiten ergibt sich hier noch eine recht anschauliche Interpretation als Ableitungsvektoren von Kurven. Der Begriff ist hier insbesondere aufgeführt, um bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten den Sinn der Definition zu erkennen:

Definition: Tangentialvektor, Tangentialvektorraum
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine n-dim. Teilmannigfaltigkeit und $c : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ eine differenzierbare Abbildung. Dann heißt $(p, v) := v_p := \dot{c}(t_0)$ ein *Tangentialvektor* an M in $p = c(t_0)$. Die Menge der Tangentialvektoren im Punkt p heißt *Tangentialvektorraum* T_pM in p. ▷

Um Kurven und Tangentialräume auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten definieren zu können, benötigen wir zunächst den Begriff der Differenzierbarkeit für Funktionen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Im Folgenden sind (falls nicht anders erwähnt) M und N immer differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m mit den differenzierbaren Strukturen $(U_j, \varphi_j)_{(j \in J)}$ und $(U'_k, \varphi'_k)_{(k \in K)}$.

Definition: Koordinatendarstellung
Für $f : M \to N$ heißt $\varphi'_k \circ f \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap f^{-1}(U_k)) \subseteq \mathbb{R}^n \to \varphi'_k(U'_k) \subseteq \mathbb{R}^m$ die *Koordinatendarstellungen* von f bezüglich der Karten φ_j, φ'_k. ▷

Definition: Differenzierbarkeit auf einer Mannigfaltigkeit
$f : M \longrightarrow N$ heißt *differenzierbar* (oder C^r), falls die Koordinatendarstellung von f bezüglich aller Karten von M und N differenzierbar (oder C^r) ist. ▷

Um die Differenzierbarkeit in einem Punkt zu verifizieren reicht es aus, dieses anhand eines Koordinatensystems zu tun. Dies mach man sich leicht anhand des folgenden Diagrammes klar.

$$\begin{tikzcd}
\varphi_i(U_i) \arrow[r, "\tilde{f}"] & \varphi'_{i'}(U_{i'}) \\
M \arrow[u, "\varphi_i"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_j"'] & N \arrow[u, "\varphi'_{i'}"'] \arrow[d, "\varphi'_{j'}"] \\
\varphi_j(U_j) \arrow[r, "\tilde{f}'"] & \varphi'_{j'}(U_{j'})
\end{tikzcd}$$

Außerdem sind die Koordinatenabbildungen automatisch differenzierbar.
Wollen wir Tangentialvektoren und Tangentialräume von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten definieren, so stellt sich nun das Problem, dass wir keinen umgebenden Raum zur Verfügung haben, der uns in natürlicher Weise die Ableitung zur Verfügung stellt. Wir geben hier drei äquivalente Definitionen an, von denen die erste an die Situation bei Teilmannigfaltigkeiten angelehnt und wahrscheinlich am anschaulichsten ist.

Definition: Kurve, Tangentialvektor - geometrisch
Eine differenzierbare Abbildung $c : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ heißt *Kurve.* Wir wählen eine Karte φ um p. Ein *Tangentialvektor* X an M im Punkt p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven bezüglich der Äquivalenzrelation

$$c \sim_p \bar{c} :\Longleftrightarrow p = c(0) = \bar{c}(0) \text{ und } \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi \circ c) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi \circ \bar{c})$$

$\triangleright$

Die nächste Definition ist vielleicht weniger anschaulich, sie ist jedoch die, mit der sich in den meisten Situationen am leichtesten rechnen läßt. Leiten läßt man sich dabei von der Interpretation von Tangentialvektoren im $\mathbb{R}^n$ als Richtungsableitungen skalarer Funktionen $X_p(f) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tX)-f(p)}{t}$:

Definition: Tangentialvektor - algebraisch
Sei

$$\mathcal{F}_p(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : f \text{ ist differenzierbar } \}/ \sim_p$$

die Menge der *Keime von Funktionen* mit

$$f \sim_p g :\Leftrightarrow \text{ es ex. eine Umgebung } U_p \text{ von } p \text{, so dass } \left.f\right|_{U_p} = \left.g\right|_{U_p}$$

Ein *Tangentialvektor* X an M im Punkt p ist eine Derivation, d.h eine Abbildung

$$X : \mathcal{F}_p(M) \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X(\lambda[f] + [g]) &= \lambda X([f]) + X([g]) && \text{(Linearität)} \\ X([fg]) &= X([f])g + fX([g]) && \text{(Produktregel)} \end{aligned}$$

$\triangleright$

Der Vollständigkeit halber sei hier noch die dritte Definitionsmöglichkeit erwähnt, wie sie häufig in der Physik verwendet wird. Auch sie ist äquivalent zu den beiden obigen Definitionen:

Definition: Tangentialvektor - physikalisch
Ein *Tangentialvektor* X an M im Punkt p ist ein bzgl. eines Koordinatensystems $\varphi : U_p \subseteq M \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ gegebenes n-Tupel

$$X(p) =: X_p = (\xi^1, \ldots, \xi^n),$$

dessen Werte in einem anderen Koordinatensystem $\tilde{\varphi} : \tilde{U}_p \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ $\tilde{\varphi}(p) = (y^1(p), \ldots, y^n(p))$

$$\tilde{\xi^i} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_p \xi^j$$

sind. D.h. Tangentialvektoren sind die Objekte, die sich mit der Jacobimatrix der Koordinatenwechsel (insbesondere linear) transformieren. $\triangleright$

Definition: Tangentialvektorraum
Die Menge der Tangentialvektoren in p wird mit T_pM bezeichnet und heißt *Tangentialvektorraum.* $\triangleright$

Um konkret mit Tangentialvektoren rechnen zu können, benötigen wir eine Basis der entsprechenden Tangentialräume. Wir geben hier lediglich eine für die algebraische Sichtweise des Tangentialvektorraums an, da wir nur mit ihr konkret rechnen werden:

Satz 1.5 (Basis von T_pM) *Sei $\varphi : U_p \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ $\varphi(p') = (x^1(p'), \dots, x^n(p'))$ ein Koordinatensystem in einer Umgebung U_p von $p \in M$. Der Tangentialraum T_pM ist ein n-dim. Vektorraum, aufgespannt von der Basis*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

wobei wir dabei $f : M \to \mathbb{R}$ als Funktion $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_p) \to \mathbb{R}$ auffassen und

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}([f])\right|_p := \left.\frac{\partial}{\partial x^i} f \circ \varphi_i^{-1}\right|_{\varphi_i(p)}$$

setzen D.h. für $X \in T_pM$ und $[f] \in \mathcal{F}_p(M)$ gilt dann

$$X([f]) = \sum_{i=1}^{n} X(x^i) \left.\frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i}\right|_p$$

Mit dem Begriff des Tangentialvektorraums können wir nun Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten linear approximieren. Diese lineare Approximation ist das im Folgenden definierte Differential:

Definition: Differential
Ist $\lambda : M \to N$ eine C^∞ Abbildung, so ist

$$d\lambda_p : T_pM \to T_pN$$

mit

$$d\lambda_p(X_p)(f) := X_p(f \circ \lambda)$$

das *Differential* von λ.

▷

Beispiel 1.6 (Koordinatendifferentiale) *Für ein Koordinatensystem $\varphi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ $p \mapsto \varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ sind die einzelnen Koordinatenfunktionen $x^i : U \to \mathbb{R}$ dach Definition differenzierbare Abbildungen. Dann bilden die* Koordinatendifferentiale *$dx^i_p : T_pM \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt p die duale Basis von $\partial_1, \dots, \partial_n$ in $T_pM^\star$. Für eine C^∞-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$ ist*

$$dx^i_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right)([f]) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (f \circ x^i)(p) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p x^i(p) \right) f'(p)$$

und somit gilt $dx^i(\partial_j) = \delta_{ij}$.