Formale Gruppen und Kobordismen (3)

Sommerakademie „Formale Gruppen"
Andreas Balser*

11. September 2003

1 Der Satz von Landweber (über Kohomologieoperationen)

Hier wollen wir den Satz von Landweber, in dem Kohomologieoperationen auf MU klassifiziert werden, diskutieren.[1]

Wir werden uns eng an den Originaltext [Lan67] halten. Diese Arbeit hat große Überschneidungen mit [Nov67], daher wird das vorgestellte Ergebnis auch als „Satz von Landweber-Novikov" bezeichnet. Am Elegantesten kann man ihn mit der Sprache der so genannten *Hopf Algebroide* formulieren ([Rav86, 4.1.11]). Diese Formulierung, auf die wir hier nicht näher eingehen, ist nötig, um die Eingangsdaten der Adams-Spektralsequenz zu berechnen.

Wir bemerken noch, dass die hier für die unitäre Gruppe vorgestellten Ergebnisse quasi unverändert auch für die Gruppe Sp gelten, und mit geringen Modifikationen auch für O.

Definition 1.1. Eine *stabile Kohomologie-Operation* θ von Grad l auf $MU^*(\bullet, \bullet)$ ist eine Familie linearer Abbildungen

$$\theta : MU^k(X, A) \to MU^{k+l}(X, A),$$

die mit induzierten Abbildungen und Suspensionen kommutiert (mit anderen Worten: θ ist eine natürliche Transformation $MU^*(\bullet, \bullet) \to MU^{*+l}(\bullet, \bullet)$).

Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}^l$ die Menge aller stabilen Kohomologie-Operationen vom Grad l, und mit $\mathcal{A}^* := \bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}^l$.

Mit punktweiser Addition und Komposition wird $\mathcal{A}^*$ zu einem graduierten Ring (den wir gelegentlich als Algebra über $\mathbb{Z}$ auffassen werden).

Da $MU^*(X, A)$ ein graduierter Modul über $MU^* := MU^*(pt) \cong L$ ist, können wir MU^* als Unteralgebra von $\mathcal{A}^0 \subset \mathcal{A}^*$ auffassen.

*balser@mathematik.uni-muenchen.de, http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~balser

[1] Dieser Teil wurde nicht auf der Sommerakademie vorgetragen.

Definition 1.2. Eine *charakteristische Kobordismus-Klasse* γ vom Grad l ist ein Funktor, der einem komplexen Vektorbündel $\xi \to X$ über einem CW-Komplex eine Kobordismus-Klasse $\gamma(\xi) \in MU^l(X)$ zuweist. Dieser Funktor soll sich unter Vektorbündel-Abbildungen natürlich verhalten und stabil sein (d.h. $\gamma(\xi \oplus l) = \gamma(\xi)$ für jedes triviale Bündel $l \to X$).

Wie oben erhalten wir $\mathcal{C}^l$ und $\mathcal{C}^*$, und letzteres ist ein graduierter Ring mit punktweisen Operationen (auch $\mathcal{C}^*$ werden wir gelegentlich als Algebra über $\mathbb{Z}$ auffassen).

Wir interessieren uns für den Zusammenhang der beiden eben definierten Algebren, und definieren eine Abbildung $\Phi : \mathcal{A}^* \to \mathcal{C}^*$ wie folgt:

Für $\theta \in \mathcal{A}^*$ und $\xi \to X$ ein n-dimensionales Vektorbündel sei $\phi_{\xi,*}$ der Thom Isomorphismus $\phi_{\xi,l} : MU^l(X) \to MU^{l+2n}(M(\xi))$ (der von der Multiplikation mit der *Thom-Klasse* $u_\xi \in MU^{2n}(M(\xi))$ induziert wird), und wir definieren:

$$\Phi(\theta)(\xi) := \phi_{\xi,l}^{-1}\theta\phi_{\xi,0}(1) = \phi_{\xi,l}^{-1}\theta u_\xi$$

Theorem 1.3 ([Lan67, 3.1]). *Φ ist ein Isomorphismus zwischen graduierten abelschen Gruppen.*

Beweisskizze. Wir konstruieren eine inverse Abbildung Θ. Sei also $\gamma \in \mathcal{C}^*$ und u_ξ die Thom-Klasse eines Vektorbündels ξ. Wir definieren $\Theta(\gamma)(u_\xi) := \phi_{\xi,l}(\gamma(\xi))$, und stellen damit sicher, dass Θ die Umkehrung von Φ wird.

Jetzt müssen wir die Definition von Θ, d.h. die Wirkung von $\Theta(\gamma)$ noch konsistent auf beliebige Kohomologie-Klassen fortsetzen. Hierzu repräsentiert man eine Kohomologie-Klasse durch eine Abbildung nach MU_l, und kann das universelle Bündel über MU_l zurückziehen. Dies nutzt man zur Definition von Θ. $\square$

Aus der komplexen Orientierung x_{MU} des Spektrums MU erhalten wir, da $\mathbb{C}P^\infty$ klassifizierend für (komplexe) Linienbündel ist, Euler-Klassen E_1 für komplexe Linienbündel. Ähnlich wie in der Konstruktion der Chern-Klassen c_k lassen sich höhere Kobordismus-Klassen E_k definieren, die folgende Eigenschaften haben (und die durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt sind):

$$E_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} E_i(\xi)E_j(\eta) \qquad \text{Whitneysche Summenformel}$$

$$E_k(\xi) = 0 \qquad \text{für alle } k > \dim \xi.$$

Nun bestimmen die E_k eine Polynom-Unteralgebra C^* von $\mathcal{C}^*$ (da die Abbildung $E_k \to c_k$ einen Homomorphismus von C^* nach $H^*(BU(n))$ induziert (für alle n), der eingeschränkt auf $\{E_k \mid k \leq n\}$ bijektiv ist).

Weiterhin lässt sich zeigen:

Theorem 1.4 ([Lan67, 4.2]). $\mathcal{C}^* \cong L \otimes C^* \cong L[E_1, E_2, \dots]$ *als abelsche Gruppen.* $\square$

Durch den Isomorphismus Φ können wir $A^* := \Phi^{-1}(C^*)$ definieren, und wir wissen, dass $\mathcal{A}^* \cong L \otimes A^*$ gilt.

Wir dürfen nicht vergessen, dass die Komposition von Elementen aus A^* *nicht* der Multiplikation oder Komposition der Polynome, durch die wir die Elemente repräsentieren, ist.

Die Produktabbildung φ^* des Rings $\mathcal{A}^*$ schränkt sich also ein auf eine Abbildung $\varphi^* : A^* \otimes A^* \to \mathcal{A}^*$.

Nach diesen Überlegungen wissen wir das folgende Theorem zu schätzen:

Theorem 1.5 ([Lan67, 5.3]). *A^* ist eine Unteralgebra von $\mathcal{A}^*$, d.h. A^* ist abgeschlossen unter Nacheinander-Ausführung, also: $\varphi^* : A^* \otimes A^* \to A^*$.* □

Auf $A^* \cong C^*$ kann man ein Koprodukt $\psi^* : C^* \to C^* \otimes C^*$ definieren durch:

$$\psi^*(E_k) := \sum_{i+j=k} E_i \otimes E_j.$$

Dann kann man sich davon überzeugen, dass (A^*, φ^*, ψ^*) eine so genannte *Hopf Algebra* ist.

2 Lokalisierung, Brown-Peterson Homologie und das Spektrum BP

Die Brown-Peterson Homologie und das zugehörige Spektrum BP wurden in dem Artikel [BP66] eingeführt; seine Struktur und der Zusammenhang mit der Lokalisierung $MU_{(p)}$ des Spektrums MU an $\mathbb{Z}_{(p)}$ wurde erstmals in [Qui69] studiert.

Die Darstellung in diesem Abschnitt lehnt sich an [Ada74, II, 15 & 16], [Koc96, 4.6] und [Wil82] an.

Hierbei bezeichnet $\mathbb{Z}_{(p)}$ die Lokalisierung des Rings $\mathbb{Z}$ an dem Ideal (p) für eine Primzahl p; mit anderen Worten:

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{n}{q} \mid n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \notin (p) \right\}$$

Wir erinnern uns daran, dass $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong 0$ für $n \notin (p)$ und $\mathbb{Z}_{p^n} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ gilt.

Das Spektrum MU soll also an p *lokalisiert* werden: Man betrachtet die Homologietheorie, die durch $MU_{(p),*}(X, A) := MU_*(X, A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ definiert ist, d.h. wir betrachten nur den p-Torsions-Anteil (und den freien Anteil) der MU-Homologiegruppen (man beachte, dass dies eine Homologietheorie erklärt, weil $\mathbb{Z}_{(p)}$ torsionsfrei ist; die gleiche Konstruktion für Kohomologie gäbe keine Kohomologietheorie).

Nach dem Brownschen Darstellungssatz gibt es ein zugehöriges Spektrum, das wir mit $MU_{(p)}$ bezeichnen. Man kann für ein „lokalisiertes Spektrum“ auch eine explizite(re) Konstruktion angeben, siehe [Koc96, 4.6.1].

Das Ziel dieses Abschnitts ist, das Spektrum $MU_{(p)}$ und die zugehörige Homologietheorie in Kopien von so genannten Brown-Peterson Spektren zu zerlegen.

Hierzu wollen wir zunächst einen kanonischen Ring-Homomorphismus $\varepsilon_* : MU_{(p),*} \to MU_{(p),*}$ finden, der idempotent ist; durch ihn wird ein direkter Summand von $MU_{(p),*}$ ausgezeichnet, den wir BP_* nennen werden. (Die Abhängigkeit von der gewählten Primzahl p spiegelt sich in der Literatur aus unerfindlichen Gründen nicht in der Notation wieder.)

Dieser Ring-Homomorphismus wird von einer Abbildung $\varepsilon : MU_{(p)} \to MU_{(p)}$ induziert, die eindeutig und idempotent bis auf Homotopie ist; somit können wir $\varepsilon_* : MU_{(p),*}(X, A) \to MU_{(p),*}(X, A)$ als Homologie-Operation auffassen. Insbesondere ist das Bild von ε_* eine Homologie-Theorie (aufgrund der Idempotenz von ε_*), die wir BP nennen. Hierzu gibt es nach dem Brownschen Darstellungssatz ein Spektrum BP.

Die Homologiegruppen $MU_{(p),*}(X, A)$ zerfallen in direkte Summen aus „Kopien“ von BP.

BP-Theorie ist auch für die *chromatische Spektralsequenz* nötig, mit der man die Eingangsdaten für die Adams Spektralsequenz ausrechnen kann.

Die Schritte sind im Detail:

Lemma 2.1 ([Koc96, 4.4.7]). *Es gibt eine Bijektion zwischen Homotopie-Klassen von Abbildungen $MU_{(p)} \to MU_{(p)}$ und Potenzreihen aus $MU_{(p),*}[[X]]$ mit X als führendem Term.*

Beweisskizze. Es gilt $MU^*_{(p)}(\mathbb{C}P^\infty) = MU_{(p),*}[[x^{MU}]]$. Also erhalten wir aus einem $g : MU_{(p)} \to MU_{(p)}$ eine Potenzreihe $g_*(x^{MU}) \in MU_{(p),*}$. Man kann zeigen, dass dies eine Bijektion liefert. □

Lemma 2.2 ([Koc96, 4.6.2]). *Seien f, g Abbildungen $MU_{(p)} \to MU_{(p)}$; falls $f_* = g_* : MU_{(p),*} \to MU_{(p),*}$ gilt, so sind f und g homotop.* □

Wir erinnern uns daran, dass $MU_* := MU_*(pt) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ mit $\dim x_i = 2i$ gilt ([Rav86, 3.1.5]); folglich ist auch

$$MU_{(p),*} = \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2, \dots].$$

Wir wollen jetzt die Abbildungen ε bzw. ε_* finden. Hierzu konstruieren wir zunächst Abbildungen ε_d:

Proposition 2.3. *Zu jeder natürlichen Zahl $d \notin p\mathbb{N}$ gibt es eine Abbildung $\varepsilon_d : MU_{(p)} \to MU_{(p)}$, die bis auf Homotopie idempotent ist und auf $MU_{(p),*}$ wie folgt wirkt:*

$$\varepsilon_{d,*}[\mathbb{C}P^n] = \begin{cases} [\mathbb{C}P^n] & \text{falls } n \not\equiv -1 (d) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jedes Paar $\varepsilon_{d_1}, \varepsilon_{d_2}$ solcher Abbildungen kommutiert bis auf Homotopie.

Beweisskizze. Da $[\mathbb{C}P^n] \in MU_{(p),2n}$ gilt, ist $\varepsilon_{d,*}$ durch obige Bedingungen vollständig bestimmt. Mit Lemma 2.2 wissen wir, dass für ε_d höchstens eine Homotopieklasse von Abbildungen in Frage kommt. Gezeigt werden muss noch, dass eine solche Abbildung existiert.

Einige Details des Beweises werden in Abschnitt 3 ausgeführt.

Idempotenz und Kommutativität folgen mit Lemma 2.2 direkt aus der Wirkung auf $MU_{(p),*}$. □

Theorem 2.4. *Es gibt eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $\varepsilon : MU_{(p)} \to MU_{(p)}$, die bis auf Homotopie idempotent ist, und auf $MU_{(p),*}$ wie folgt wirkt:*

$$\varepsilon_*[\mathbb{C}P^n] = \begin{cases} [\mathbb{C}P^n] & \textit{falls } n = p^t - 1 \textit{ für ein } t \in \mathbb{N} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweisskizze. Wir wollen

$$\varepsilon := \bigcirc_{q \neq p \text{ prim}} \varepsilon_q$$

wählen. Da für jedes Folgenelement des Spektrums MU nur endlich viele ε_d nicht als Identität wirken, konvergiert die angeschriebene Komposition. Die anderen Eigenschaften folgen sofort. □

Jetzt definiert das Bild von ε_* eine Homologie-Theorie BP, die durch ein Spektrum BP dargestellt werden kann.

Für dieses Spektrum gibt es noch keine einfache Beschreibung (da ε nur bis auf Homotopie idempotent ist, ist BP nicht gleich dem Bild von ε).

Zuletzt wollen wir uns noch überlegen:

Theorem 2.5 ([Koc96, 4.6.7.g]). *$MU_{(p)}$ ist homotopieäquivalent zu der Einpunkt-Vereinigung von gewissen Suspensionen von BP.*

Beweisskizze. Zunächst beobachten wir, dass $BP_* = \mathbb{Z}_{(p)}[V_1, V_2, \ldots]$ gilt, mit $\dim V_t = 2(p^t - 1)$. Nun betrachten wir die Menge S der Monome in $MU_{(p),*} = \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2, \ldots]$, die von $\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \backslash \{p^t - 1 \mid t \in \mathbb{N}\}\}$ erzeugt werden. Für $x_I \in S$ bezeichne $d(I)$ den Grad von x_I. Dann kann man eine Homotopie-Äquivalenz zwischen

$$\bigvee_{x_I \in S} \Sigma^{d(I)} BP \quad \text{und} \quad MU_{(p)}$$

finden. □

3 Zum Beweis von 2.3

Wir betrachten zunächst die Gruppe $MU_* \otimes \mathbb{Q} \cong L \otimes \mathbb{Q}$. Das universelle Gruppengesetz auf L kann als formales Gruppengesetz auf $MU_* \otimes \mathbb{Q}$ aufgefasst werden; dieses ist nun isomorph zum additiven, d.h. es gibt Abbildungen $\log^{MU}, \exp^{MU}$, für die

$$F(x, y) = \exp^{MU}(\log^{MU} x + \log^{MU} y)$$

gilt. Seien $m_k \in MU_{2k} \otimes \mathbb{Q}$ so, dass $\log^{MU} x = \sum_{k=0}^{\infty} m_k x^{k+1}$ mit $m_0 = 0$ (es gilt $m_k = \frac{[\mathbb{C}P^k]}{k+1}$ nach Mischenko, [Ada74, II, 9.2]).

Für ein gegebenes $g : MU_{(p)} \to MU_{(p)}$ beachten wir $MU_* \otimes \mathbb{Q} \cong MU_{(p),*} \otimes \mathbb{Q}$, und definieren

$$\operatorname{mog} x := \sum_{k \geq 0} g_*(m_k) x^{k+1}$$

Außerdem definieren wir die Potenzreihe $f(x^{MU}) := g_*(x^{MU})$. Man kann zeigen, dass

$$f^{-1}(z) = \exp^{MU} \operatorname{mog} z$$

gilt [Koc96, 4.6.4].

Zum Beweis: Wir haben $\varepsilon_{d,*}$ auf $MU_{(p),*}$ vorgegeben, sind aber noch nicht in der Situation, um 2.1 anzuwenden. Es ist also mog und damit f^{-1} gegeben (s.o.); zu zeigen ist nur, dass f^{-1} eine Potenzreihe über $MU_{(p),*}$ ist.

Man kann ohne Probleme nachrechnen, dass unser mog

$$\operatorname{mog} z = \log^{MU} z - \frac{1}{d} \left(\log^{MU}(\zeta_1 z) + \cdots + \log^{MU}(\zeta_d z) \right)$$

erfüllt (in $MU_{(p),*} \otimes \mathbb{C}$, wobei ζ_i die d-ten Einheitswurzeln durchläuft). Es gilt

$$f^{-1}(z) = \exp^{MU} \operatorname{mog} z = z -_F \left(\frac{1}{d} \right)_F (\zeta_1 z +_F \cdots +_F \zeta_d z) .$$

Da dies symmetrisch in den ζ_i ist, ist f^{-1} tatsächlich eine Potenzreihe über $MU_{(p),*}$ ist. □

Literatur

[Ada74] J.F. Adams. *Stable Homotopy and Generalised Homology.* University of Chicago, 1974.
Die wohl ausführlichste Quelle für diesen ganzen Bereich. Insbesondere Teil III stellt die Grundlagen schön zusammen.

[BP66] E.H. Brown and F.P. Peterson. A spectrum whose $\mathbb{Z}_p$ cohomology is the algebra of reduced p-th powers. *Topology*, 5:149–154, 1966.

[Koc96] S.O. Kochman. *Bordism, Stable Homotopy and Adams Spectral Sequences.* Fields Institute Monographs 7, 1996.

[Lan67] Peter S. Landweber. Cobordism operations and hopf algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 129:94–110, 1967.

[Nov67] S.P. Novikov. The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theories. *Mathematics of the USSR – Izvestija*, 1.2:827–913, 1967.

[Qui69] D.G. Quillen. On the formal group laws of oriented and unoriented cobordism theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75:1293–1298, 1969.

[Rav86] Douglas C. Ravenel. *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres.* Academic Press, Inc., 1986.
Dieses Buch wird in einem anderen Verlag neu aufgelegt und ist z.Zt. im Internet unter `http://www.math.rochester.edu/people/faculty/drav/mu.html` erhältlich.

[Rav92] Douglas C. Ravenel. *Nilpotence and Periodicity in Stable Homotopy Theory.* Annals of Mathematics Studies 128, 1992.
In Anhang B wird unser Themenkomplex knapp zusammengefasst (größtenteils ohne Beweise).

[Wil82] W. Stephen Wilson. *Brown-Peterson Homology - an Introduction and Sampler.* Regional conference series in mathematics 48, 1982.