Seminar im Wintersemester 2001/2002
Spezielle Kapitel aus Gruppen- und Darstellungstheorie
Homogene Räume und Bahnräume von Lie-Gruppen

Christoph Müller

21.1.2002/28.1.2002

Vorbemerkungen

In diesem Seminarvortrag diskutieren wir homogene Räume und Bahnräume von Lie-Gruppen. Dazu werden etliche Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie benötigt, die wir im ersten Kapitel einführen. Es handelt sich hier um die Fortsetzung des ersten Kapitels aus dem Vortrag von Christoph Wockel [1]. Diese Grundlagen werden auch bei Andreas Balser [2] gebraucht, dessen Vortrag über Transformationsgruppen sich an diesen Vortrag anschließt. Die Darstellung der Grundlagen erfolgt im wesentlichen in Anlehnung an das Buch von Warner [3], ebenso der Abschnitt über homogene Räume. Bahnräume werden im Buch von Varadarajan [4] behandelt.

Literatur

[1] Christoph Wockel, “Integration auf Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen”, Seminarvortrag WS 2001/2002, TU Darmstadt

[2] Andreas Balser, “Transformationsgruppen”, Seminarvortrag WS 2001/2002, TU Darmstadt

[3] Frank W. Warner, “Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups”, Scott, Foresman and Company, 1971

[4] V.S. Varadarajan, “Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations”, Springer Verlag, 1984

[5] William M. Boothby, “An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry”, Academic Press, 1975

1. Kapitel

Grundlagen

1.3 Vektorfelder und Untermannigfaltigkeiten

Im folgenden sei immer M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für $p \in M$ sei $T_p(M)$ der Tangentialraum am Punkt p, wobei wir in der Regel die algebraische Definition von Tangentialvektoren verwenden.

Wenn wir von „differenzierbaren" Abbildungen sprechen, soll das unendlich oft differenzierbar (also C^∞ oder glatt) heißen. Bei reellen analytischen oder komplex differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kann man sich stattdessen in der Regel „analytisch" oder „holomorph" denken, ohne dass sich an den Beweisen viel ändert.

Definition 1.8. Ein (differenzierbares) *Vektorfeld* X auf M ist eine Funktion, die jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor $X_p \in T_p(M)$ zuordnet, so dass für jede reellwertige differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ die Komposition $Xf : M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto X_p f$, differenzierbar ist. Den Vektorraum aller differenzierbaren Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathcal{X}(M)$.

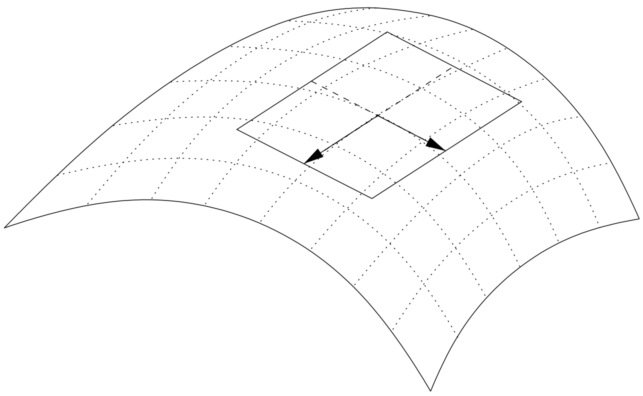

Abbildung 1.1: Richtungsableitungen im Tangentialraum

Beispiel 1.9 (Richtungsableitungen). Sei (U, φ) eine Koordinatenumgebung von M mit Koordinatenfunktionen $\varphi = (x_1, \ldots, x_n) : M \to \mathbb{R}^n$. Einem Punkt $p \in U$ ordnen wir die Richtungsableitung in Richtung x_i zu, genauer für differenzierbares $f : M \to \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i))}{t}$$

Dann ist $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf U, und für jedes $p \in U$ bilden die Vektoren

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : i = 1, \ldots, n \right\},$$

eine Basis des Tangentialraums $T_p(M)$.

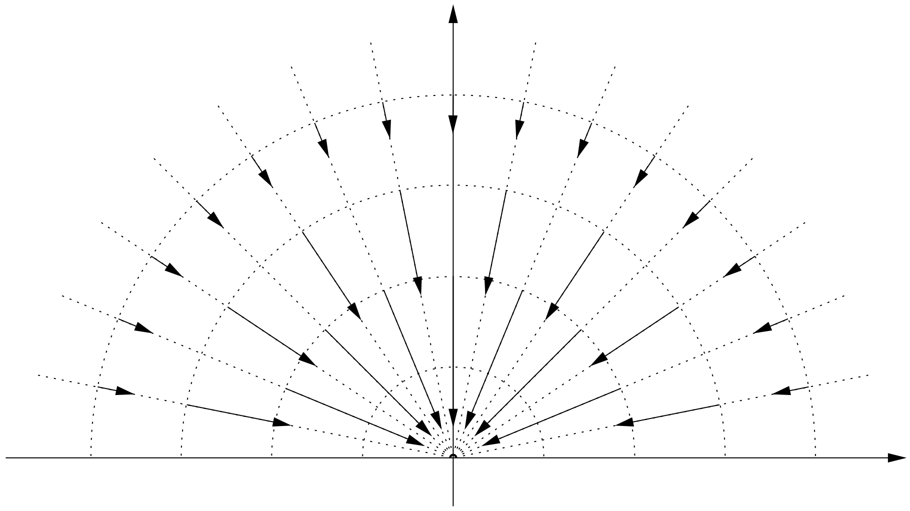

Abbildung 1.2: Gravitationsfeld

Beispiel 1.10 (zweidimensionales Gravitationsfeld). Wir betrachten die Teilmannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von $\mathbb{R}^2$ mit Polarkoordinaten (r, φ). Denken wir uns im Mittelpunkt 0 einen Massenpunkt mit Masse M, so wirkt auf eine Testmasse m am Punkt (r, φ) eine anziehende Gravitationskraft der Stärke $G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ radial nach innen ($G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ ist die Gravitationskonstante). Die Kraft F deuten wir als Vektorfeld, und zwar als

$$F = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + 0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

Beispiel 1.11 (Tangentialvektor an eine Kurve). Es sei $\gamma :]a, b[\to M$ eine differenzierbare Kurve in einer Mannigfaltigkeit M. Dann wird längs der Kurve das Vektorfeld der Tangentialvektoren definiert durch ($f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar):

$$\dot{\gamma}(t)(f) := (f \circ \gamma)^{\cdot}(t) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=t} (f \circ \gamma)(\tau)$$

Definition 1.12 (Integralkurve). Es sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf M. Dann heißt eine differenzierbare Kurve $\gamma :]a, b[\to M$ *Integralkurve von* X, wenn $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ für alle $t \in]a, b[$ gilt.

Beispiel 1.13. Im Gravitationsvektorfeld von oben verlaufen die Integralkurven auf den radial vom Ursprung ausgehenden Geraden ("Feldlinien" des Gravitationsfeldes), und zwar nach innen mit immer größerer Geschwindigkeit, je näher sie dem Ursprung kommen. Demnach lassen sich die Integralkurven hier nicht für alle Zeiten fortsetzen. Man beachte, dass wirkliche Flugkurven von Körpern mit Trägheit anders aussehen können.

Satz 1.14. *Es sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf M. Dann gibt es für alle $p \in M$ Elemente $a(p)$ und $b(p)$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sowie eine differenzierbare Kurve $\gamma_p :]a(p), b(p)[\to M$, so dass*

(a) $0 \in]a(p), b(p)[$ *und* $\gamma_p(0) = p$.

(b) γ_p *ist eine Integralkurve von* X.

(c) Wenn $\mu :]c, d[\to M$ eine weitere differenzierbare Kurve ist, die die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, so gilt $]c, d[\subseteq]a(p), b(p)[$ und $\mu = \gamma_p|_{]c,d[}$.

Beweisskizze. Beschränkt man sich auf eine Koordinatenumgebung, so ist die definierende Gleichung $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ für γ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung im $\mathbb{R}^m$, wobei m die Dimension der Mannigfaltigkeit ist. Wir erhalten lokal eindeutige Lösungen, da X als beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt wird. Die lokalen Lösungen kann man zusammensetzen zu einem Lösungsstück, das die Bedingungen (a) und (c) erfüllt.

Definition 1.15 (Lie-Klammer für Vektorfelder). Es seien X und Y differenzierbare Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M. Wir definieren ein Vektorfeld $[X, Y]$ auf M durch die Wirkung auf eine differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$:

$$[X, Y]_p(f) := X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

Lemma 1.16. *Für X und Y wie oben ist $[X, Y]$ tatsächlich ein differenzierbares Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit M. Außerdem gelten*

(a) Die Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ ist bilinear.

(b) $(\forall X, Y \in \mathcal{X}) \quad [X, Y] = -[Y, X]$.

(c) $(\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}) \quad [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$

Beweisskizze. Exemplarisch wollen wir vorrechnen, dass $[X,Y]_p$ tatsächlich ein Tangentialvektor in $T_p(M)$ ist. Dazu ist zu zeigen:

(i) $[X,Y]_p$ ist linear: $[X,Y]_p(\alpha f + \beta g) = \alpha [X,Y]_p(f) + \beta [X,Y]_p(g)$.

(ii) $[X,Y]_p$ ist eine Derivation: $[X,Y]_p(fg) = f(p)[X,Y]_p(g) + g(p)[X,Y]_p(f)$.

Die Linearität (i) ist offensichtlich, für (ii) verwenden wir zunächst, dass X_p und Y_p Derivationen sind:

$$\begin{aligned} X(fg)(p) &= X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f) = (fXg + gXf)(p) \\ Y(fg)(p) &= Y_p(fg) = f(p)Y_p(g) + g(p)Y_p(f) = (fYg + gYf)(p) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich, wieder unter Anwendung der Derivationen X_p und Y_p:

$$\begin{aligned} [X,Y]_p(fg) =& X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) \\ =& X_p(fYg + gYf) - Y_p(fXg + gXf) \\ =& f(p)X_p(Yg) + (Y_pg)(X_pf) + g(p)X_p(Yf) + (Y_pf)(X_pg) \\ & - f(p)Y_p(Xg) - (X_pg)(Y_pf) - g(p)Y_p(Xf) - (X_pf)(Y_pg) \\ =& f(p)X_p(Yg) - f(p)Y_p(Xg) + g(p)X_p(Yf) - g(p)Y_p(Xf) \\ =& f(p)[X_p(Yg) - Y_p(Xg)] + g(p)[X_p(Yf) - Y_p(Xf)] \\ =& f(p)[X,Y]_p(g) + g(p)[X,Y]_p(f) \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man (c), die Eigenschaften (a) und (b) sind ohnehin offensichtlich.

Definition 1.17 (Lie-Algebra). Eine Lie-Algebra ist ein Vektorraum $\mathcal{X}$ zusammen mit einer Abbildung $[\,\cdot,\cdot\,] : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, die (a) bis (c) aus Lemma 1.16 erfüllt.

Definition 1.18 (Immersion, Untermannigfaltigkeit, Einbettung). Wir betrachten eine differenzierbare Abbildung $\psi : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten M und N der Dimensionen m und n.

1. ψ heißt Immersion, falls $(d\psi)_p$ für alle $p \in M$ injektiv ist.

2. Das Paar (M, ψ) heißt Untermannigfaltigkeit, wenn ψ eine injektive Immersion ist.

3. Die Abbildung ψ heißt Einbettung, falls es eine injektive Immersion ist und zusätzlich ein Homöomorphismus auf das Bild $\psi(M)$, versehen mit der relativen Topologie in N.

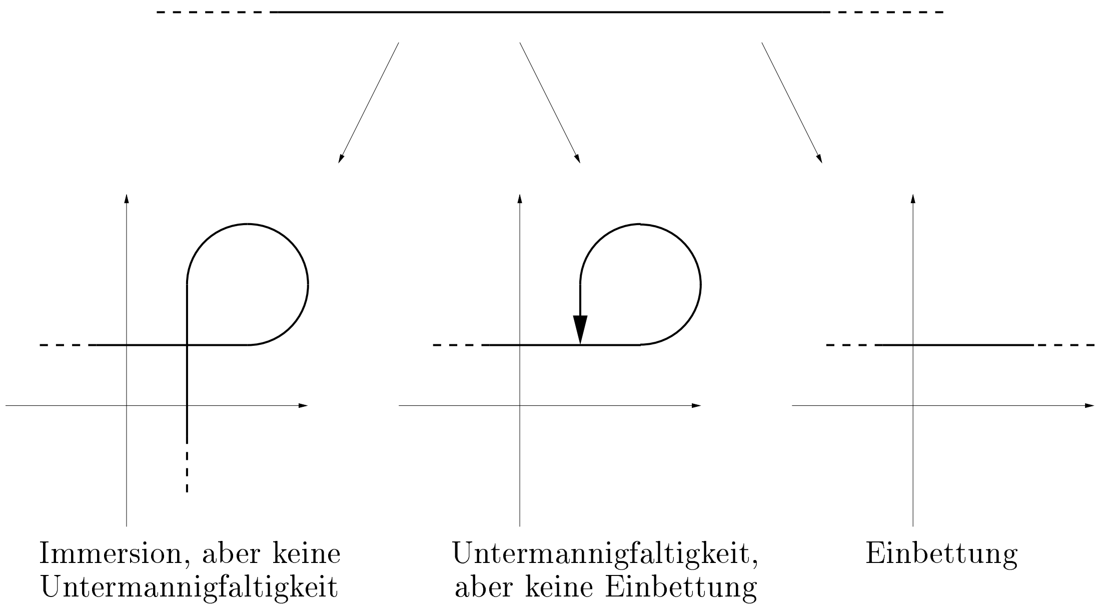

Abbildung 1.3: Beispiele für Immersionen, Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen

Definition 1.19 (Distribution). Es sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq m$. Eine *n-dimensionale Distribution $\mathcal{D}$ auf M* ist eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ einen n-dimensionalen Untervektorraum $\mathcal{D}(p)$ von $T_p(M)$ zuordnet. Die Distribution heißt *differenzierbar*, falls es für jedes $p \in M$ eine Umgebung U von p und differenzierbare Vektorfelder $X_1, \ldots, X_n$ auf U gibt, die $\mathcal{D}(q)$ an jedem Punkt $q \in U$ aufspannen.

Wir sagen, ein Vektorfeld X *liegt in $\mathcal{D}$*, falls $X_p \in \mathcal{D}(p)$ für alle $p \in M$ gilt. Eine Distribution $\mathcal{D}$ heißt *involutiv*, falls für alle in $\mathcal{D}$ liegenden Vektorfelder X und Y auch $[X, Y]$ in $\mathcal{D}$ liegt.

Definition 1.20 (Integralmannigfaltigkeit). Wir nennen eine Untermannigfaltigkeit (N, ψ) von M *Integralmannigfaltigkeit* einer Distribution $\mathcal{D}$ auf M, falls für alle $p \in N$ gilt:

$$d\psi(T_p(N)) = \mathcal{D}(\psi(p))$$

Beispiel 1.21. Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$, trivialerweise eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Den Tangentialvektorraum $T_p(\mathbb{R}^3)$ in einem Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ können wir wieder mit demselben $\mathbb{R}^3$ identifizieren, wobei wir uns den Ursprung in p denken.

Eine zweidimensionale Distribution wählt nun in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ einen zweidimensionalen Untervektorraum, also eine Ebene aus. Eine Integralmannigfaltigkeit zu einer solchen Distribution ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, also eine Fläche, deren Tangentialvektorräume gerade den ausgewählten Ebenen entsprechen.

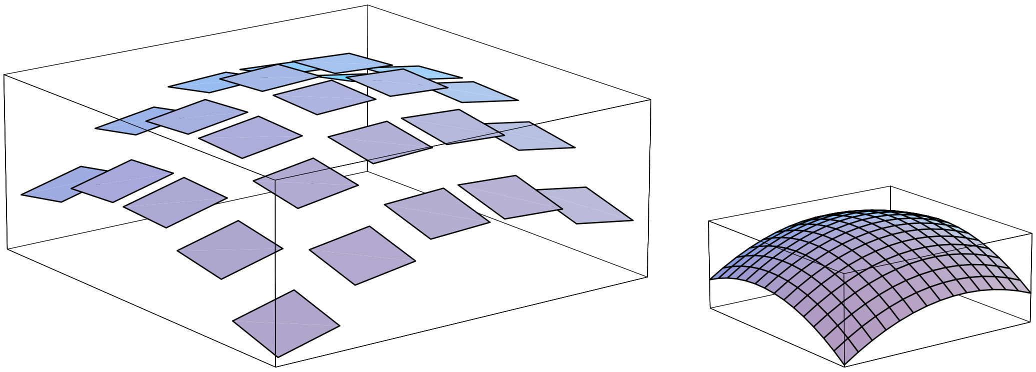

Abbildung 1.4: Distribution im $\mathbb{R}^3$ und zugehörige Integralmannigfaltigkeit

Beispiel 1.22. Ein konkrete zweidimensionale Distribution im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\mathcal{D}(p) = \{v \in T_p(\mathbb{R}^3) : v \perp p\}$. Die zugehörigen Integralmannigfaltigkeiten sind die konzentrischen Sphären um 0.

Satz 1.23. *Es sei $\mathcal{D}$ eine differenzierbare Distribution auf M, so dass durch jeden Punkt von M eine Integralmannigfaltigkeit von $\mathcal{D}$ verläuft. Dann ist $\mathcal{D}$ involutiv.*

Beweisskizze. Gegeben seien Vektorfelder X und Y auf M, die in $\mathcal{D}$ liegen, sowie ein Punkt $p \in M$. Ist (N, ψ) die Integralmannigfaltigkeit durch p, so können wir uns X und Y auf $\psi(N)$ erzeugt denken durch Vektorfelder $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ auf N (genauer: $X \circ \psi = d\psi \circ \tilde{X}$ und $Y \circ \psi = d\psi \circ \tilde{Y}$). Im Tangentialraum von N können wir natürlich $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ bilden und durch Verkettung mit ψ wird daraus wieder ein Vektorfeld in $\mathcal{D}$, das mit $[X, Y]$ übereinstimmt.

Satz 1.24 (Frobenius). *Es sei $\mathcal{D}$ eine $(d-k)$-dimensionale, involutive, differenzierbare Distribution auf einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\mathcal{D}$, die p enthält. Es gibt nämlich ein kubisches Koordinatensystem (V, φ) mit Mittelpunkt p und Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_d$, so dass die Schnitte*

$$S_m(a) := \{q \in U : x_i(q) = a_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\}$$

für festes $a \in \varphi(V)$ Integralmannigfaltigkeiten für $\mathcal{D}$ sind. Außerdem liegt jede zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit N von $\mathcal{D}$ mit $N \subseteq V$ in einem dieser Schnitte.

Beweisskizze. Für eindimensionale Distributionen geht es um Integralkurven, deren Existenz wir schon gezeigt haben. Für Distributionen höherer Dimension hat man es aber nicht mehr mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun, sondern mit partiellen. Deswegen braucht man hier eine weitere Bedingung, die Involutivität, um zu Lösungen zu kommen. Den Beweis führt man durch Induktion über die Dimension der Distribution.

1.4 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Definition 1.25 (Lie-Gruppe). Eine *Lie-Gruppe* ist gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und eine Gruppe, wobei die Multiplikation $G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$, und die Inversion $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ differenzierbare Abbildungen sind.

Definition 1.26 (Lie-Untergruppe). Ist G eine Lie-Gruppe, so heißt das Paar (H,ψ) *Lie-Untergruppe* von G, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) H ist eine Lie-Gruppe;

(b) (H,ψ) ist eine Untermannigfaltigkeit von G;

(c) $\psi : H \to G$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Ist $\psi(H)$ zusätzlich abgeschlossen in G, so heißt (H,ψ) *abgeschlossene Lie-Untergruppe* von G (oft nur *Lie-Untergruppe*). Ist H auch noch zusammenhängend, so spricht man von einer *analytischen Untergruppe.*

Satz 1.27. *Es seien G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann lässt sich H auf genau eine Art und Weise zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit machen, so dass (H,ψ), $\psi : h \mapsto h$, eine Lie-Untergruppe von G ist. Außerdem ist ψ eine Einbettung, d.h. $\psi : H \to \psi(H)$ ein Homöomorphismus zwischen H und dem Bild von H in G versehen mit der relativen Topologie.*

Beispiel 1.28 (Lineare Lie-Gruppen). Es sei $GL_n\mathbb{R}$ die Gruppe der invertierbaren reellen $n \times n$-Matrizen. Es gilt $GL_n\mathbb{R} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$, wobei $\det : M_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Polynom eine stetige Abbildung auf dem $\mathbb{R}^{n^2}$ ist. Damit ist $GL_n\mathbb{R}$ eine offene Teilmenge der n^2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M_n\mathbb{R}$, also selbst eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Da die Multiplikation von Matrizen und die Inversion auf $GL_n\mathbb{R}$ differenzierbar sind (Cramersche Regel), ist $GL_n\mathbb{R}$ eine Lie-Gruppe.

Nach dem vorhergehenden Satz ist jede abgeschlossene Untergruppe von $GL_n\mathbb{R}$ eine Lie-Untergruppe von $GL_n\mathbb{R}$, insbesondere selbst wieder eine Lie-Gruppe. Lie-Gruppen, die sich als Lie-Untergruppen von geeigneten $GL_n\mathbb{R}$ darstellen lassen, nennt man *lineare Lie-Gruppen.* Typische Beispiele sind:

$$\begin{aligned}
&SL_n\mathbb{R} = \{A \in GL_n\mathbb{R} : \det A = 1\}\\
&O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL_n\mathbb{R} : A^{-1} = A^t\}\\
&SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL_n\mathbb{R} : A^{-1} = A^t \text{ und } \det A = 1\}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.29. Auch $(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{T},\cdot) = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sind natürlich Lie-Gruppen, und ebenso $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ mit Multiplikation auf jeder Komponente. Wir können uns $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ als Torus im $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T} \times \mathbb{T}, \quad \varphi(t) = (\exp(2\pi i t), \exp(2\pi i \delta t)),$$

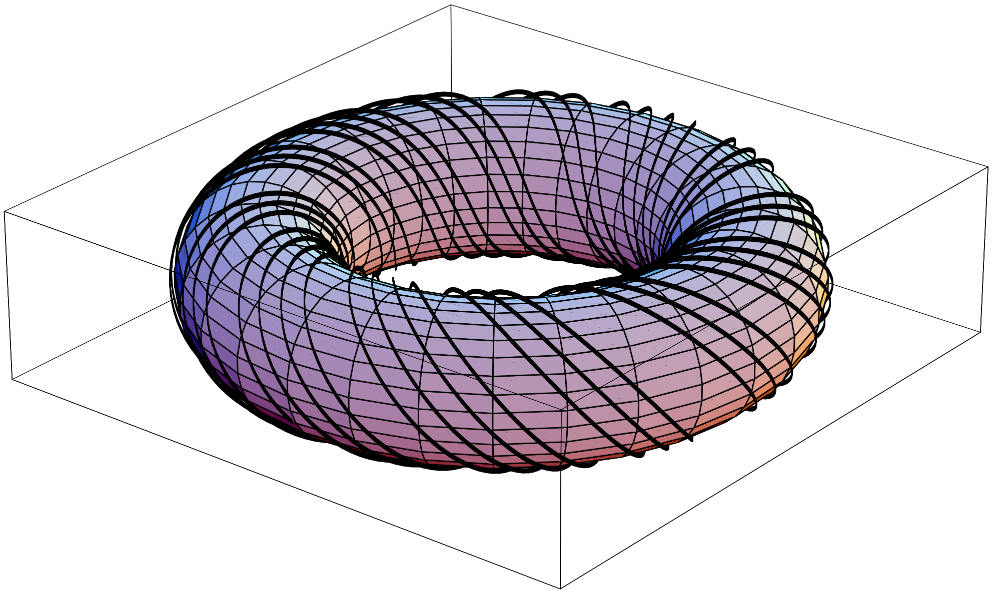

Abbildung 1.5: $\mathbb{R}$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$

wickelt die reelle Gerade auf den Torus (siehe Abbildung 1.5), und für $\delta \notin \mathbb{Q}$ ist die Abbildung injektiv mit nichtverschwindender Ableitung. Demnach ist $(\mathbb{R}, \varphi)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, jedoch ist $\varphi(\mathbb{R})$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ und damit φ keine Einbettung.

Definition 1.30 (Linkstranslation, Linksinvarianz). Es seien G eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Die *Linkstranslation* $l_g : G \to G$ ist definiert als $l_g(h) = gh$, und es handelt sich offenbar um einen Diffeomorphismus. Ein Vektorfeld X auf G heißt *linksinvariant*, falls $dl_g \circ X = X \circ l_g$ für alle $g \in G$ oder expliziter $X_{gh} = dl_g X_h$ für alle $g, h \in G$ gilt. Insbesondere ist wegen $X_g = dl_g X_e$ das gesamte Vektorfeld dann schon durch den Tangentialvektor X_e im Tangentialraum der Eins e bestimmt.

Satz 1.31 (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe). *Es sei G eine Lie-Gruppe. Jedes linksinvariante Vektorfeld auf G ist automatisch differenzierbar, und die Menge $\mathfrak{g}$ aller linksinvarianten Vektorfelder auf G ist ein Vektorraum, der isomorph zum Tangentialraum $T_e(G)$ an der Eins von G ist. Der Raum $\mathfrak{g}$ ist abgeschlossen bezüglich der Lie-Klammer, und bildet mit dieser eine Lie-Algebra.*

Definition 1.32 (Lie-Unteralgebra). Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, so heißt ein Unterraum $\mathfrak{h}$ Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, falls $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ für alle $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Satz 1.33. *Es sei (H, ψ) eine Lie-Untergruppe einer Lie-Gruppe G. Dann ist die zu H gehörende Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ mittels $d\psi$ isomorph zur Lie-Unteralgebra $d\psi(\mathfrak{h})$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G.*

Definition 1.34 (Exponentialfunktion). Es seien gegeben eine Lie-Gruppe G, die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_e(G)$ sowie ein $X \in \mathfrak{g}$. Aus Satz 1.14 folgt die Existenz und Eindeutigkeit einer Integralkurve $\exp_X : \mathbb{R} \to G$ von X mit $\exp_X(0) = e$. Es handelt sich dabei um eine *Einparametergruppe* von G, d.h. einen Homomorphismus von $\mathbb{R}$ nach G. Wir definieren $\exp(X) = \exp_X(1)$.

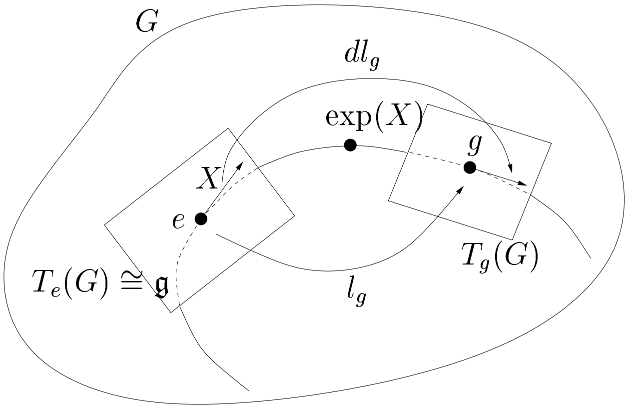

Abbildung 1.6: Exponentialabbildung und linksinvariantes Vektorfeld

2. Kapitel

Homogene Räume und Bahnräume

In diesem Kapitel widmen wir uns dem eigentlichen Vortragsthema. Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen der Begriffe Wirkung, Transitivität, homogener Raum und Stabilisator. Wir werden in Abschnitt 2.3 zeigen, dass sich jeder homogene Raum schreiben lässt als Quotientenmannigfaltigkeit einer Lie-Gruppe. Vorher werden wir in Abschnitt 2.2 die Konstruktion solcher Quotientenmannigfaltigkeiten diskutieren. Im Falle von Wirkungen, die nicht transitiv sind, betrachtet man Bahnen der Wirkung und die zugehörigen Bahnräume. Das ist das Thema von Abschnitt 2.4.

2.1 Definitionen

Definition 2.1 (Wirkung, homogener Raum). Es sei G eine Lie-Gruppe und M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Abbildung $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ heißt *Wirkung* von G auf M, falls

- $(\forall x \in M) \quad 1 \cdot x = x$,
- $(\forall g_1, g_2 \in G)(\forall x \in M) \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$.

Die Gruppe G *wirkt transitiv* auf M, falls es ein $x_0 \in M$ gibt, so dass $g \mapsto g \cdot x_0$ surjektiv ist. In diesem Fall heißt M auch *homogener Raum* von G.

Lemma 2.2. *Die Wirkung von G auf M ist genau dann transitiv, falls es für alle $x, x' \in M$ ein $g \in G$ gibt mit $g \cdot x = x'$.*

Beweis. Sei zunächst die Wirkung transitiv, d.h. $g \mapsto g \cdot x_0$ surjektiv. Zu $x, x' \in M$ gibt es dann $g, g' \in G$ mit $x = g \cdot x_0$ und $x' = g' \cdot x_0$. Daraus folgt $x' = g' \cdot x_0 = g' \cdot (g^{-1} \cdot x) = (g'g^{-1}) \cdot x$.
Gilt umgekehrt die zweite Bedingung, so gibt es bei festem $x_0 = x \in M$ für alle $x' \in M$ ein $g \in G$ mit $x' = g \cdot x_0$, d.h. die Wirkung ist transitiv. $\square$

Beispiel 2.3. Für unser Beispiel von $\mathbb{R}$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ können wir eine Wirkung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ konstruieren durch $r \cdot x := \varphi(r)x$. Allerdings ist die Wirkung nicht transitiv, weil φ nicht surjektiv ist.

Beispiel 2.4. Die Lie-Gruppe $GL_n\mathbb{R}$ wirkt durch Matrixmultiplikation auf den $\mathbb{R}^n$. Die Wirkung ist so nicht transitiv, weil der Nullvektor Probleme macht. Schränken wir die Wirkung auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein, so wird die Wirkung transitiv.

Die orthogonale Gruppe $O(n,\mathbb{R})$ wirkt isometrisch auf den $\mathbb{R}^n$, d.h. Längen bleiben erhalten. Insbesondere können wir die Wirkung einschränken auf die Einheitskugel

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}.$$

Die erhaltene Wirkung $O(n,\mathbb{R}) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ ist natürlich transitiv.

Definition 2.5 (Stabilisator). Es sei M ein homogener Raum der Lie-Gruppe G. Für $x_0 \in M$ definiert $G_{x_0} = \{g \in G : g \cdot x_0 = x_0\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von G, den *Stabilisator* von x_0.

Beispiel 2.6. Wir bestimmen jetzt den Stabilisator für die Wirkungen in Beispiel 2.4. Zu vorgegebenem $x_1 \in \mathbb{R}^n$ wählen wir $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, so dass $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist. Die Matrizen im Stabilisator $(GL_n\mathbb{R})_{x_1}$ von x_1 sind nun gerade die Matrizen, die bezüglich dieser Basis die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

haben, denn genau die lassen den ersten Basisvektor x_1 fest.

Ebenso kann man ein gegebenes $x_1 \in S^{n-1}$ zu einer Orthonormalbasis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ergänzen. Die Matrizen im Stabilisator $(O(n,\mathbb{R}))_{x_1}$ sind dann gerade die Matrizen in der Gruppe $O(n,\mathbb{R})$, die bezüglich dieser Basis die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

haben. Die Nullen in der ersten Zeile ergeben sich aus der Tatsache, dass bei orthogonalen Matrizen die Spalten ein Orthonormalsystem bilden. Daraus folgt auch, dass die rechte untere $(n-1) \times (n-1)$-Teilmatrix selbst orthogonal ist. Das bedeutet:

$$(O(n,\mathbb{R}))_{x_1} \cong (O(n-1,\mathbb{R}))$$

2.2 Quotienten von Lie-Gruppen

Als Vorbereitung auf den Satz 2.10 über homogene Räume zeigen wir hier zunächst, wie man Quotienten von Lie-Gruppen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur ausstattet.

Satz 2.7. *Gegeben seien eine Lie-Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe H von G. Unter G/H verstehen wir die Menge $\{gH : g \in G\}$ der Linksnebenklassen von H, und $\pi : G \to H$ sei die zugehörige Projektion $g \mapsto gH$. Dann lässt sich G/H auf genau eine Art und Weise zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit machen, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) π ist differenzierbar.

(b) Für jedes $gH \in G/H$ gibt es eine offene Umgebung W von gH in G/H sowie eine differenzierbare Abbildung $\tau : W \to G$ mit $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_{G/H}$ („es gibt differenzierbare lokale Schnitte“).

Beweisskizze. Der Beweis wird folgendermaßen ablaufen:

- Als Topologie auf G/H wählen wir die Quotiententopologie und zeigen, dass G/H damit ein Hausdorff-Raum ist und eine abzählbare Basis hat. Damit wird π eine stetige und offene Abbildung.

- Wir wenden den Satz von Frobenius an auf die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von H bzw. G, um eine „schöne“ Koordinatenumgebung zu erhalten, in der die Schnitte gerade den Nebenklassen von H entsprechen (siehe Skizze 2.1). Damit gelingt es uns, einen kleinen Teil von G/H bijektiv mit dem Teil der Koordinatenumgebung zu identifizieren, der ganz in einen $\mathbb{R}^k$ abgebildet wird. So erhalten wir eine Koordinatenumgebung der Eins.

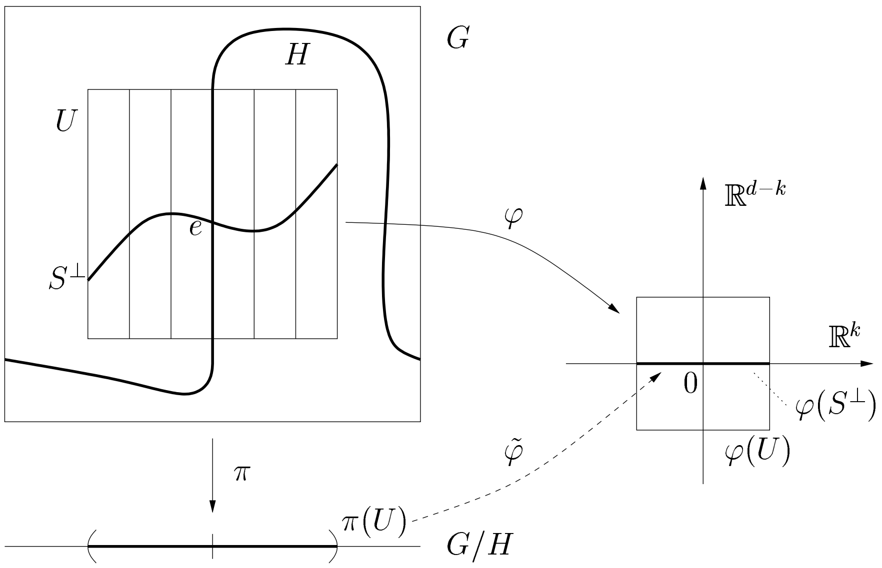

Abbildung 2.1: Konstruktion eines Koordinatensystems um die Eins

- Durch Linkstranslation erhalten wir andere Koordinatenumgebungen und Koordinatenfunktionen, wobei wir die Differenzierbarkeit der Koordinatenwechsel nachrechnen müssen. Das ist der aufwendigste Teil des Beweises.
- Wir zeigen, dass bei unserer Konstruktion π differenzierbar ist und dass differenzierbare lokale Schnitte existieren.
- Schließlich folgt aus der Differenzierbarkeit und der Existenz der lokalen Schnitte leicht die Eindeutigkeit der Konstruktion.

Beweis. Zunächst müssen wir auf G/H eine Topologie definieren. Wir nehmen die übliche Quotiententopologie, d.h. eine Menge U in G/H soll genau dann offen sein, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in G ist. Damit ist π automatisch stetig, aber in unserem Fall ist π sogar eine offene Abbildung. Denn für eine offene Teilmenge W von G ist

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = WH = \bigcup_{h\in H} Wh$$

und damit $\pi(W)$ offen, weil W und damit in der Lie-Gruppe G die Rechtstranslate Wh offen sind.

Als nächstes zeigen wir, dass G/H mit dieser Topologie ein Hausdorff-Raum ist. Dazu betrachten wir die offensichtlich stetige Funktion $\alpha : G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto g'g^{-1}$, und die Menge

$$R := \{(g, g') \in G \times G : (\exists h \in H)\ g' = gh\} = \bigcup_{h\in H} \{(g, g') : g'g^{-1} = h\} = \alpha^{-1}(H).$$

Als stetiges Urbild der abgeschlossenen Menge H ist R abgeschlossen. Sind nun $gH, g'H \in G/H$ gegeben, so ist $gH = g'H$ genau dann, wenn $(g, g') \in R$. Für verschiedene gH und $g'H$ gibt es wegen der Offenheit von $(G \times G) \setminus R$ Umgebungen V von g und V' von g' in G, so dass $V \times V' \cap R = \emptyset$ gilt. Damit sind $\pi(V)$ und $\pi(V')$ disjunkte offene Umgebungen von gH und $g'H$ in G/H. Das beweist, dass G/H ein Hausdorff-Raum ist.

Eine abzählbare Basis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Topologie auf G überträgt sich mittels π in eine Basis $(\pi(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ von G/H. Denn ist gH ein Element in G/H und V eine offene Umgebung von gH in G/H, so ist $\pi^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von g in G, und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g \in U_n \subseteq \pi^{-1}(V)$. Dann gilt für $\pi(U_n)$ wie gewünscht $gH \in \pi(U_n) \subseteq V$.

Sei d die Dimension von G. Gemäß Satz 1.27 denken wir uns H als eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $d - k$ für geeignetes k. Wir werden nun Koordinatenumgebungen für G/H konstruieren, so dass sich G/H als k-dimensionale Mannigfaltigkeit herausstellt.

Zentrales Hilfsmittel ist der Satz 1.24 von Frobenius. Wir wenden ihn an auf die Distribution $\mathcal{D} = \mathfrak{h}$, die durch die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von H in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G bestimmt wird (siehe auch Satz 1.33). Natürlich ist $\mathfrak{h}$ als Lie-Unteralgebra involutiv, so dass sich der Satz von Frobenius anwenden lässt. Wir erhalten ein kubisches Koordinatensystem (V, φ) um das Einselement e in G mit Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_d$, so dass $\varphi(e) = 0$ gilt und die Schnitte

$$S(a) := \{q \in V : x_i(q) = a_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\}$$

genau die Integralmannigfaltigkeiten von V für $\mathcal{D}$ sind.
Unter Umständen ist V noch nicht klein genug:

- Wähle $V_1 \subseteq V$ so, dass $\varphi|_{V_1}$ wieder ein kubisches Koordinatensystem ist und gerade $V_1 \cap H = S(0)$ gilt. Das ist möglich, weil H als abgeschlossene Untergruppe von G in G eingebettet ist (vergleiche Satz 1.27).

- Wähle $V_2 \subseteq V$, so dass $\varphi|_{V_2}$ kubisch ist und $V_2V_2 \subseteq V$ gilt (das geht, weil die Multiplikation in G stetig ist).

- Wähle schließlich $U \subseteq V_2$, so dass $\varphi|_U$ kubisch ist und $U^{-1}U \subseteq V_2$ gilt (das geht, weil Multiplikation und Inversion in G stetig sind).

Nun seien g und g' Punkte in U, die in derselben Nebenklasse $gH = g'H$ von H liegen. Für die gilt wegen der Wahl der Umgebungen:

$$g^{-1}g' \in V_2 \cap H = V_2 \cap S(0) \quad \Rightarrow \quad g' \in g(V_2 \cap S(0))$$

Nun ist aber nicht nur $V_2 \cap S(0)$, sondern auch $g(V_2 \cap S(0))$ eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit für $\mathcal{D}$, die wegen der Wahl von V_2 ganz in V_1 liegt. Aus dem Satz von Frobenius folgt dann, dass $g(V_2 \cap S(0))$ ganz in einem der Schnitt $S(a)$ von V liegt, und damit liegen g und g' in demselben Schnitt $S(a)$.
Es seien umgekehrt g und g' Punkte in U, die in demselben Schnitt $S(a)$ liegen. Die Linkstranslation mit g^{-1} ist ein Diffeomorphismus, der nach Wahl von U insbesondere Schnitte von U in Schnitte von V_2 abbildet. Daraus folgt, dass $g^{-1}S(a)$ ganz in einem Schnitt von V_2 liegt, der sowohl $g^{-1}g'$, als auch $g^{-1}g = e$ enthält. Wir wissen aber, dass $S(0) = V_1 \cap H$ der eindeutig bestimmte Schnitt ist, der e enthält. Es folgt also $g^{-1}g' \in H$ bzw. $gH = g'H$.
Wir haben jetzt schon gezeigt, dass die Schnitte von $S(a) \cap U$ gerade den Nebenklassen von H entsprechen, die U schneiden. Genauer wissen wir, dass die Teilmenge

$$S^{\perp} := \{q \in U : x_{k+1}(q) = \cdots = x_d(q) = 0\}$$

von U, die einen Punkt aus jedem Schnitt in U enthält, durch π bijektiv auf $\pi(U) = \pi(S^{\perp})$ abgebildet wird. Demnach ist die Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \pi(U) \to \varphi(U), \quad \tilde{\varphi} = \varphi \circ (\pi|_{S^{\perp}})^{-1}$$

ein Homöomorphismus, da φ einer ist und π wie anfangs gezeigt nicht nur stetig, sondern auch offen ist. Außerdem liegen in $\tilde{\varphi}(\pi(U))$ nach Definition von $S^{\perp}$ gerade die Punkte in $\mathbb{R}^d \cap \varphi(U)$, deren letzte $d-k$ Koordinaten Null sind. Diese Punkte können wir offensichtlich als eine offene Teilmenge eines $\mathbb{R}^k$ auffassen, so dass $(\pi(U), \tilde{\varphi})$ eine Koordinatenumgebung von $eH = H$ in G/H ist.

Durch Linkstranslation können wir aus dieser Koordinatenumgebung um H eine Koordinatenumgebung um ein beliebiges $gH \in G/H$ machen. Wir bezeichnen die Linkstranslation um $g \in G$ auf G mit l_g, die von ihr auf G/H induzierte mit $\tilde{l}_g$:

$$\begin{aligned} l_g &: G \to G, \quad l_g(g') = gg' \\ \tilde{l}_g &: G/H \to G/H, \quad \tilde{l}_g(g'H) = gg'H \end{aligned}$$

Sowohl l_g, als auch $\tilde{l}_g$ sind Homöomorphismen, ebenso wie die oben definierte Koordinatenabbildung $\tilde{\varphi}$. Damit ist $\pi(gU) = g\pi(U) = \tilde{l}_g(\pi(U))$ eine offene Umgebung von gH und die Abbildung $\tilde{\varphi}_{gH} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{l}_{g^{-1}}$ ebenfalls ein Homöomorphismus. Wir nehmen $(\pi(gU), \tilde{\varphi}_{gH})$ als Koordinatensystem für G/H hinzu.

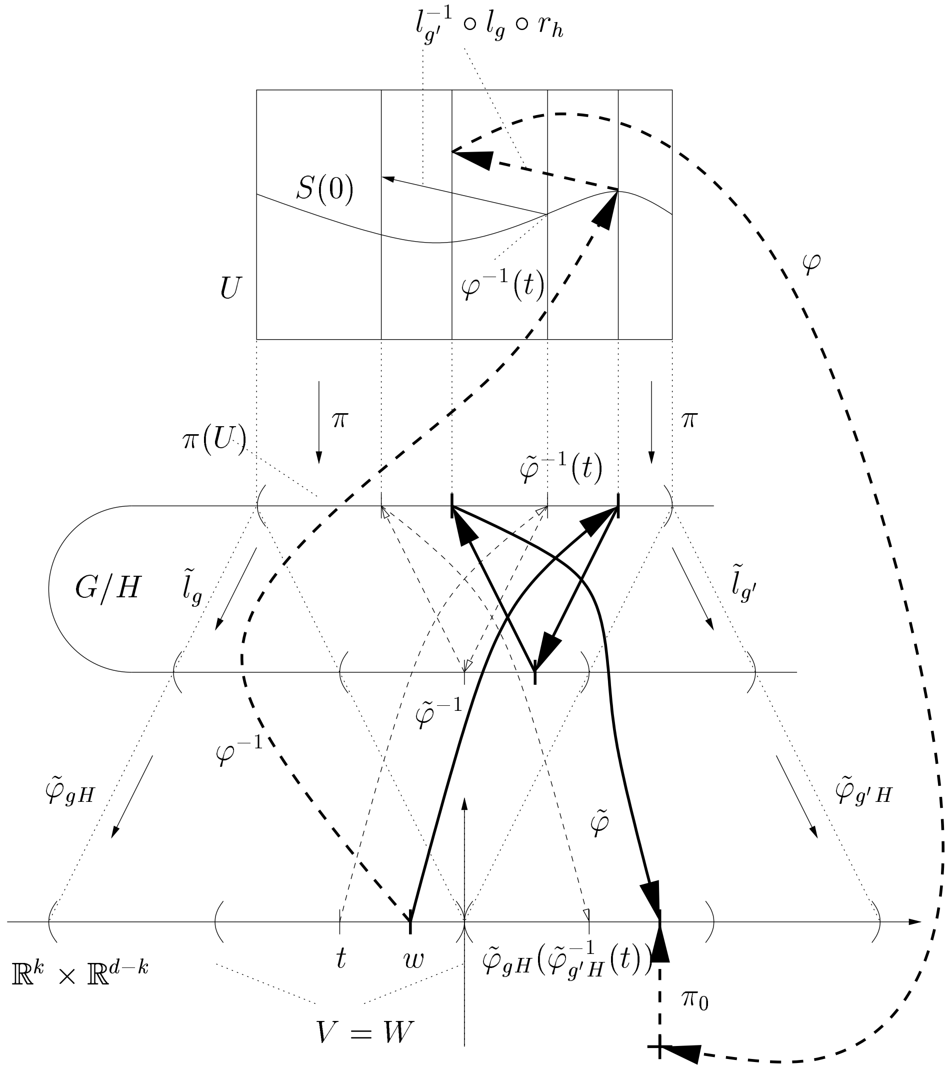

Abbildung 2.2: Differenzierbarkeit des Koordinatenwechsels

Da diese Koordinatensysteme natürlich G/H überdecken, müssen wir nur noch prüfen, dass bei zwei solchen Koordinatensystemen $(\pi(gU), \tilde{\varphi}_{gH})$ und $(\pi(g'U), \tilde{\varphi}_{g'H})$ der folgende Koordinatenwechsel differenzierbar ist:

$$\tilde{\varphi}_{g'H} \circ \tilde{\varphi}_{gH}^{-1}|_V, \quad V := \tilde{\varphi}_{gH}(\pi(gU) \cap \pi(g'U)).$$

Das gelingt uns, indem wir diese Abbildung auf die Koordinatenabbildung φ von G zurückführen. Die dazu nötigen Schritte kann man auf dem Diagramm in Abbildung 2.2 verfolgen.

Wir beginnen mit einem $t \in V$ und stellen fest, dass $\tilde{l}_{g'}^{-1} \circ \tilde{l}_g \circ \tilde{\varphi}^{-1}(t)$ wieder in $\pi(U)$ liegt, da $\tilde{l}_g \circ \tilde{\varphi}^{-1}(t)$ im Schnitt der beiden Koordinatenumgebungen liegt. Dementsprechend liegt $l_{g'}^{-1} \circ l_g \circ \varphi^{-1}(t)$ im Urbild $UH = \pi^{-1}(\pi(U))$ von $\pi(U)$, und es gibt daher ein $h \in H$ mit $l_{g'}^{-1} \circ l_g \circ r_h \circ \varphi^{-1}(t) \in U$, wobei r_h die Rechtsmultiplikation mit h in G ist. Alle betrachteten Funktionen sind stetig, so dass es eine ganze Umgebung W von t gibt mit $l_{g'}^{-1} \circ l_g \circ r_h \circ \varphi^{-1}(W) \subseteq U$ (im Diagramm $W = V$).

Es genügt, die Differenzierbarkeit des Koordinatenwechsels auf W zu beweisen. Auf W gilt aber die folgende Gleichheit:

$$\tilde{\varphi}_{g'H} \circ \tilde{\varphi}_{gH}^{-1}|_W = \pi_0 \circ \varphi \circ r_h \circ l_{g'}^{-1} \circ l_g \circ \varphi^{-1}|_W.$$

Dabei ist $\pi_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf den Unterraum der Punkte, deren $d-k$ letzte Koordinaten Null sind. Wenn wir diese Gleichung glauben, folgt die Differenzierbarkeit des Koordinatenwechsels aus der Differenzierbarkeit aller Abbildungen auf der rechten Seite.

Im Diagramm sind die Abbildungen auf der linken und der rechten Seite der Gleichung dick bzw. dick gestrichelt dargestellt. Die formale Rechnung verläuft folgendermaßen ($w \in W$):

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{g'H} \circ \tilde{\varphi}_{gH}^{-1}(w) &= \tilde{\varphi} \circ \tilde{l}_{g'}^{-1} \circ \tilde{l}_g \circ \tilde{\varphi}^{-1}(w) \\
&= \underbrace{\varphi \circ (\pi|_{S^\perp})^{-1}}_{\tilde{\varphi}} \circ \tilde{l}_{g'}^{-1} \circ \tilde{l}_g \circ \underbrace{(\pi|_{S^\perp}) \circ \varphi^{-1}}_{\tilde{\varphi}^{-1}}(w) \\
&= \underbrace{\varphi \circ (\pi|_{S^\perp})^{-1} \circ \pi}_{\pi_0 \circ \varphi} \circ \underbrace{r_h \circ l_{g'}^{-1} \circ l_g \circ \varphi^{-1}(w)}_{\in U} \\
&= \pi_0 \circ \varphi \circ r_h \circ l_{g'}^{-1} \circ l_g \circ \varphi^{-1}(w)
\end{aligned}$$

Damit ist endlich gezeigt, dass G/H eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Wir prüfen noch die zwei im Satz gestellten Bedingungen:

(a) π ist differenzierbar, denn auf einer offenen Menge der Form $gU = l_g(U)$ gilt

$$\pi|_{gU} = \underbrace{\tilde{l}_g \circ \tilde{\varphi}^{-1}}_{\tilde{\varphi}_{gH}^{-1}} \circ \pi_0 \circ \varphi \circ l_g^{-1}|_{gU} = \tilde{\varphi}_{gH}^{-1} \circ \pi_0 \circ \varphi \circ l_g^{-1}|_{gU}$$

Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist π differenzierbar.

(b) Als lokaler Schnitt auf der Umgebung $\tilde{l}_g(U)$ von gH in G/H dient die Abbildung $l_g \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{gH}$, die natürlich auch differenzierbar ist.

Abschließend zeigen wir, dass die so konstruierte Mannigfaltigkeitsstruktur auf G/H eindeutig ist. Sei dazu $\widetilde{G/H}$ eine weitere Mannigfaltigkeitsstruktur auf G/H, die die beiden angegebenen Bedingungen erfüllt.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G/H \arrow[rr, "\mathrm{id}_{G/H}"'] & & \widetilde{G/H} \end{tikzcd}$$

Dann ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_{G/H} : G/H \to \widetilde{G/H}$ ebenso wie ihr Inverses differenzierbar, weil sie sich beide lokal als Komposition von π und einem differenzierbaren lokalen Schnitt darstellen lassen. Damit ist $\mathrm{id}_{G/H}$ ein Diffeomorphismus, und die Mannigfaltigkeiten G/H und $\widetilde{G/H}$ stimmen überein. □

Bemerkung 2.8. Eine Funktion f auf G/H ist genau dann differenzierbar, wenn $f \circ \pi$ eine differenzierbare Funktion auf G ist. Ist nämlich f differenzierbar, so ist sicher auch $f \circ \pi$ differenzierbar. Ist umgekehrt $f \circ \pi$ differenzierbar, dann ist f lokal die Komposition von $f \circ \pi$ und einem differenzierbaren lokalen Schnitt, also selbst differenzierbar. Man sagt auch, dass die Mannigfaltigkeitsstruktur auf G/H die *initiale Mannigfaltigkeitsstruktur* bezüglich $\pi : G \to G/H$ ist.

Satz 2.9. *Es seien G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene normale Untergruppe von G. Dann ist der homogene Raum G/H mit der üblichen Gruppenstruktur eine Lie-Gruppe.*

Beweis. Wir müssen nur prüfen, dass Multiplikation und Inversion in G/H differenzierbare Abbildungen sind. Beides folgt aus der Differenzierbarkeit der Abbildung

$$\tilde{\zeta} : G/H \times G/H \to G/H, \quad (g'H, gH) \mapsto g'g^{-1}H.$$

Um die nachzuweisen, wählen wir zunächst differenzierbare lokale Schnitte $\alpha_{g'} : W_{g'} \to G$ und $\alpha_g : W_g \to G$ von G/H in Umgebungen $W_{g'}$ von $g'H$ und W_g von gH. Mit der differenzierbaren Abbildung $\zeta : G \times G \to G$, $(g', g) \mapsto g'g^{-1}$, können wir $\tilde{\zeta}$ auf $W_{g'} \times W_g$ ausdrücken als

$$\tilde{\zeta} = \pi \circ \zeta \circ (\alpha_{g'} \times \alpha_g),$$

denn für $x'H \in W_{g'}$ und $xH \in W_g$ gilt (mit geeigneten $h', h \in H$):

$$\begin{aligned} \pi \circ \zeta \circ (\alpha_{g'} \times \alpha_g)(x'H, xH) &= \pi \circ \zeta(x'h', xh) = \pi(x'h'h^{-1}x^{-1}) \\ &= (x'h'h^{-1}x^{-1})H = x'x^{-1}H = \tilde{\zeta}(x', x) \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{\zeta}$ lokal eine Komposition differenzierbarer Abbildungen, also selbst differenzierbar. Das war zu zeigen. □

2.3 Beliebige homogene Räume als Quotienten

Wir zeigen jetzt wie angekündigt, dass man jeden homogenen Raum auch als Quotientenmannigfaltigkeit der zugehörigen Lie-Gruppe auffassen kann. Dabei spielt der Stabilisator eines Punktes eine entscheidende Rolle.

Satz 2.10. *Es sei $\eta : G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto g \cdot m$, eine transitive Wirkung einer Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M. Für $m_0 \in M$ sei mit $H = G_{m_0}$ der Stabilisator von m_0 bezeichnet, und außerdem definieren wir:*

$$\tilde{\beta} : G/H \to M, \quad \tilde{\beta}(gH) = g \cdot m_0$$

Dann ist $\tilde{\beta}$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass die Abbildung $\tilde{\beta}$ wohldefiniert ist, da aus $gH = g'H$ sofort $g^{-1}g' \in H$ folgt, und daraus

$$\tilde{\beta}(gH) = g \cdot m_0 = g \cdot ((g^{-1}g') \cdot m_0) = (gg^{-1}g') \cdot m_0 = g' \cdot m_0 = \tilde{\beta}(g'H).$$

Außerdem ist $\tilde{\beta}$ surjektiv, weil die Wirkung transitiv ist, und injektiv wegen

$$\tilde{\beta}(g'H) = g' \cdot m_0 = g \cdot m_0 = \tilde{\beta}(gH) \quad \Rightarrow \quad (g'g^{-1}) \cdot m_0 = m_0 \quad \Rightarrow \quad g'g^{-1} \in H.$$

Um zu zeigen, dass $\tilde{\beta}$ differenzierbar ist, müssen wir gemäß Bemerkung 2.8 die Differenzierbarkeit von $\beta := \tilde{\beta} \circ \pi : G \to M$ nachweisen. Dazu definieren wir die offensichtlich differenzierbare Abbildung

$$i_{m_0} : G \to G \times M, \quad i_{m_0}(g) = (g, m_0)$$

und stellen fest, dass $\tilde{\beta} \circ \pi$ gerade die Komposition $\eta \circ i_{m_0}$ mit der Wirkung ist:

$$\tilde{\beta} \circ \pi(g) = \tilde{\beta}(gH) = g \cdot m_0 = \eta(g, m_0) = \eta \circ i_{m_0}(g).$$

Damit ist $\tilde{\beta}$ eine bijektive, differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Zum Diffeomorphismus fehlt nur noch die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion, und die leiten wir ab aus dem Rangssatz (vergleiche [1], Satz 1.1). Um den anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass $d\tilde{\beta}$ auf G/H konstanten Rang hat.

Wir benutzen dazu die Linkstranslation $\tilde{l}_g : g'H \mapsto gg'H$ auf G/H und die Wirkung $\eta_g : x \mapsto g \cdot x$ auf M für festes $g \in G$. Bei beiden Abbildungen handelt es sich um Diffeomorphismen, und es gilt $\tilde{\beta} \circ \tilde{l}_g = \eta_g \circ \tilde{\beta}$ wegen

$$\tilde{\beta} \circ \tilde{l}_g(g'H) = \tilde{\beta}(gg'H) = (gg') \cdot m_0 = g \cdot (g' \cdot m_0) = \eta_g(g' \cdot m_0) = \eta_g \circ \tilde{\beta}(g'H)$$

Insbesondere ergeben sich daraus für $g' = e$ mit der Kettenregel die folgenden Aussagen über die Differentiale:

$$\begin{aligned} & (d\tilde{\beta})_{gH}(d\tilde{l}_g)_H = (d\eta_g)_{m_0}(d\tilde{\beta})_H \\ \Rightarrow \quad & (d\tilde{\beta})_{gH} = (d\eta_g)_{m_0}(d\tilde{\beta})_H(d\tilde{l}_{g^{-1}})_H \end{aligned}$$

Die Differentiale $(d\eta_g)_{m_0}$ und $(d\tilde{l}_{g^{-1}})_H$ sind Isomorphismen, weil die entsprechenden Abbildungen Diffeomorphismen sind. Da die Komposition mit Isomorphismen den Rang einer linearen Abbildung nicht verändert, schließen wir

$$\mathrm{rang}(d\tilde{\beta})_{gH} = \mathrm{rang}[(d\eta_g)_{m_0}(d\tilde{\beta})_H(d\tilde{l}_{g^{-1}})_H] = \mathrm{rang}(d\tilde{\beta})_H$$

für alle $g \in G$. Also hat $\tilde{\beta}$ auf G/H den konstanten Rang $r := \mathrm{rang}(d\tilde{\beta})_H$, und wir können den Rangsatz anwenden auf die bijektive, differenzierbare Abbildung $\tilde{\beta}$. Wir erhalten für jedes $g \in G$ Koordinatenumgebungen (V, φ) von gH und (W, ψ) von $g \cdot m_0$, so dass $\tilde{f} = \psi \circ \tilde{\beta} \circ \varphi^{-1}$ auf einer Umgebung von $\varphi(gH)$ die Form

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

hat. Aus der Bijektivität von $\tilde{\beta}$ bzw. von $\tilde{f}$ folgt sofort $n = r$, also $\tilde{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und damit $\tilde{f}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ auf Umgebungen von $\varphi(gH)$ bzw. $\psi(g \cdot m_0)$. Insbesondere ist $\tilde{f}^{-1}$ und somit nach Definiton $\tilde{\beta}^{-1}$ differenzierbar. Insgesamt ist $\tilde{\beta}$ also ein Diffeomorphismus, und das war zu zeigen. □

Beispiel 2.11. Wir kehren zurück zum Beispiel 2.4 der $O(n, \mathbb{R})$-Wirkung auf S^{n-1}. Wir haben festgestellt, dass der Stabilisator eines Punktes eine zu $O(n-1, \mathbb{R})$ isomorphe Untergruppe bildet. Aus Satz 2.7 folgt, dass der Quotient $O(n, \mathbb{R})/O(n-1, \mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit ist. Aus dem vorhergehenden Satz ergibt sich, dass dieser Quotient diffeomorph zur Mannigfaltigkeit S^{n-1} ist.

2.4 Bahnen und Bahnräume

Bisher haben wir uns auf transitive Wirkungen beschränkt. Bei Wirkungen, die nicht transitiv sind, macht die folgende Definition Sinn:

Definition 2.12. Gegeben sei eine Wirkung $(g, x) \mapsto g \cdot x$ einer Lie-Gruppe G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Dann definieren wir die *Bahn* eines Elements $x \in M$ unter G als $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$.

Beispiel 2.13. Wir betrachten die Lie-Gruppe $G = \mathbb{T}$ und als Mannigfaltigkeit die Sphäre $S^2 = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + x^2 = 1\}$. Dann definiert

$$(g, (z, x)) \mapsto g \cdot (z, x) := (gz, x)$$

offenbar eine Wirkung von G auf S^2, und für die Bahnen und Stabilisatoren gilt:

- $G \cdot (0, 1) = \{(0, 1)\}$, $G_{(0,1)} = G$;
- $G \cdot (0, -1) = \{(0, -1)\}$, $G_{(0,-1)} = G$;
- $G \cdot (z_0, x_0) = \{(z, x) \in S^2 : x = x_0\}$, $G_{(z_0,x_0)} = \{1\}$ für $|x_0| < 1$.

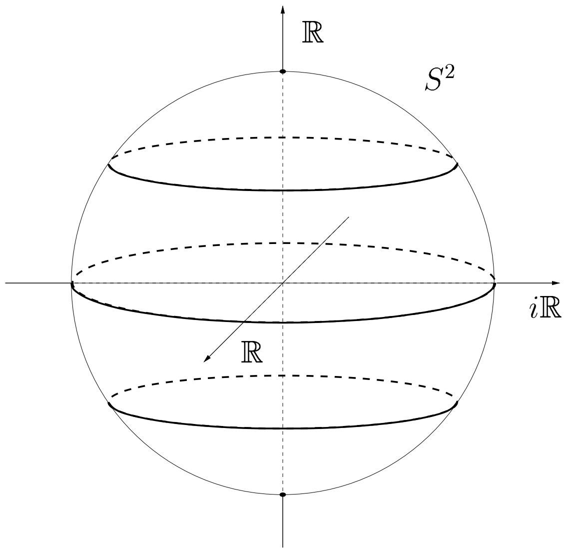

Abbildung 2.3: Bahnen auf S^2

Satz 2.14. *Zu einer Bahn $G \cdot x$ wie in Definition 2.12 betrachten wir die Abbildung*

$$\varphi_x : G/G_x \to G \cdot x, \quad \varphi_x : gG_x \mapsto g \cdot x,$$

wobei G_x den Stabilisator von x bezeichnet. Dann ist φ_x bijektiv, und die durch φ_x induzierte Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit macht $(G \cdot x, \iota)$ zu einer Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim(G) - \dim(G_x)$ von M bezüglich der Inklusion $\iota : G \cdot x \to M$.

Beweis. Die Bijektivität von φ_x ist klar, wenn man die Definitionen von Stabilisator und Bahn betrachtet. Wir müssen also nur noch prüfen, dass $\iota : G \cdot x \cong G/G_x \to M$ eine Immersion ist. Das ergibt sich aber direkt aus dem Beweis von Satz 2.10: Setzen wir $m_0 = x$ und $H = G_x$, so stimmt unser ι hier mit der Abbildung $\tilde{\beta}$ dort überein. Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich die Injektivität von $(d\iota)_{gG_x}$ an allen Punkten $gG_x \in G/G_x$ durch Weglassen aller Aussagen, die die Transitivität der Wirkung betreffen. □

Es lassen sich einfache topologische Bedingungen angeben, wann die Bahnen sogar eingebettete Untermannigfaltigkeiten bilden. Ebenfalls topologischer Natur sind die Bedingungen, unter welchen sich die Menge der Bahnen einer Wirkung selbst wieder zu einer Mannigfaltigkeit machen lassen. Das gelingt auf keinen Fall, wenn die Bahnen unterschiedliche Dimensionen haben wie in unserem Beispiel. Für die Details sei der interessierte Leser auf [4] verwiesen, wir schließen hier mit der Definition des Bahnraums:

Definition. Gegeben seien eine Wirkung einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M. Die Menge $X = M/G$ aller Bahnen $\{G \cdot x : x \in M\}$ kann man unter gewissen Voraussetzungen zu einer Mannigfaltigkeit machen, so dass die Projektion $\pi : M \to X$, $x \mapsto G \cdot x$ differenzierbar ist. Dann nennt man X den *Bahnraum* der Wirkung.