0 Einführung

0.0 Notation

In der Vorlesung wurde dieser Teil am Ende von Kapitel 0 vorgestellt.

Für reelle $m \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ setzen wir

$$\begin{aligned} A \geqq B &\Leftrightarrow a_{ij} \geqq b_{ij} \quad (\forall i, j) \\ A \geqq 0 &\Leftrightarrow \text{„}A \text{ ist nichtnegativ“} \\ A \geq B &\Leftrightarrow A \geqq B \wedge A \neq B \\ A \geq 0 &\Leftrightarrow \text{„}A \text{ ist semipositiv“} \\ A > B &\Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij} \quad (\forall i, j) \\ A > 0 &\Leftrightarrow \text{„}A \text{ ist positiv“} \end{aligned}$$

Natürlich verwenden wir die gleiche Schreibweise für Vektoren.

(Anmerkung des Autors:) Für Zahlen haben nach obigen Definitionen $\geq$ und $>$ die gleiche Bedeutung. Daher muss $\geqq$ verwendet werden; es kann sein, dass an manchen Stellen ein $\geq$ steht; wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, dass es sich um Zahlen handelt, möge $\geq$ die übliche Bedeutung haben.

Wir definieren $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqq 0\}$.

$e^i \in \mathbb{R}^n$ bezeichne den i-ten Einheitsvektor, und $e := \sum e^i = (1, \ldots, 1)^t$.

Wenn nicht anders vermerkt versehen wir $\mathbb{R}^n$ im Folgenden mit der Summennorm:

$$\|x\| = \|x\|_1 := \sum |x_i| \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n)^t)$$

Dann ist $\mathbb{P}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \wedge e^t x = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \wedge \|x\|_1 = 1\}$ der Einheitssimplex.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| := (|x_1|, \ldots, |x_n|)^t$.

Schließlich sei $I = (e^1, \ldots, e^n)$ die Einheitsmatrix, und $E := (e, \ldots, e)$

Des weiteren verwenden wir die Notation $I + J$ bzw. $\sum_{j \in J} I_j$ für die disjunkte Vereinigung von Mengen[1]. Die Notation $I - J$ wird gelegentlich für die Mengendifferenz verwendet[2].

Für Teilmengen eines Vektorraumes (bzw. einer Gruppe) verwendet Herr Kindler auch gelegentlich eine Notation wie[3]

$$\sum_{i \in I} X^i - \sum_{j \in J} Y^j := \left\{ \sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y^j : x^i \in X^i, y^j \in Y^j \right\}$$

[1] Persönlich gefällt mir diese Notation nicht und ich werde versuchen, sie in dieser Version des Skripts zu umgehen, wo möglich.

[2] Ich verwende dafür $I \backslash J$.

[3] Ich werde anstelle der grossen Summenzeichen das Zeichen $\bigoplus$ verwenden, es erscheint mir ein wenig passender, und hoffentlich auch weniger missverständlich, insbesondere in Bezug auf die andere mögliche Bedeutung von „+“ für Mengen. Hierbei ist dann darauf zu achten, dass man im Kontext erkennt, dass bei der Summe keine zusätzlichen Skalare zugelassen sind.

0.1 Beispiel (Schweinezyklus)

$y(k)$: Schweinepreis in Periode $k \in \mathbb{N}_0$.

Das Angebot

$$A(k) = a + by(k-1), \quad k \in \mathbb{N},\ b > 0$$

richtet sich nach dem vorherigen Schweinepreis.

Hier ist eine Periode ungefähr 4 Monate Trachtzeit 1 Jahr Mastzeit + zeitliche Verzögerung, also ca. 1,5 Jahre.

Die Nachfrage

$$N(k) = c + dy(k), \quad k \in \mathbb{N}_0,\ d < 0$$

richtet sich nach dem momentanen Schweinepreis.

Die (typische) Tatsache, dass der Produzent auf die Nachfrage nur mit zeitlicher Verzögerung reagieren kann, nennt man *Time-lag*.

Der Preis werde nun so festgesetzt, dass alle Schweine verkauft werden können; es herrsche also *Marktgleichgewicht*

$$A(k) = N(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

Hieraus ergibt sich folgende *Differenzengleichung*

$$y(k+1) - \frac{b}{d} y(k) = \frac{a-c}{d}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{0.1}$$

Der Preis ändert sich nicht, wenn er stationäre Lösung ist, d.h. $y(k) = \bar{y}$ mit Preisgleichgewicht

$$\begin{aligned} \bar{y} - \frac{b}{d}\bar{y} &= \frac{a-c}{d} \\ \bar{y} &= \frac{a-c}{b-d} \end{aligned}$$

In diesem Fall sind auch Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht:

$$A(k) = N(k) = a + b\bar{y} = c + d\bar{y}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Der allgemeine Fall

Setze $z(k) = y(k) - \bar{y}$. Mit (0.1) folgt dann

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \frac{b}{d} z(k) \\ z(k) &= \left(\frac{b}{d}\right)^k z(0) = \left(\frac{b}{d}\right)^k (y(0) - \bar{y}) \end{aligned}$$

und somit

$$y(k) = \left(\frac{b}{d}\right)^k (y(0) - \bar{y}) + \bar{y}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Im Falle $y(0) = \bar{y}$ tritt die Gleichgewichtslösung auf. Andernfalls oszilliert $y(k)$ wegen $\frac{b}{d} < 0$ um das Gleichgewicht $\bar{y}$. Die Schwingung ist gedämpft falls $|b| < |d|$ ist.

Dann gilt $y(k) \to \bar{y}$, d.h. im Laufe der Zeit nähert man sich dem Gleichgewichtspreis.

Im Falle $|b| = |d|$ pendelt der Preis zwischen $y(0)$ und $2\bar{y} - y(0)$.

Im Falle $|b| > |d|$ ist das Modell instabil.

Hier fehlen ein paar Skizzen.

0.2 Beispiel (einsame Insel)

Auf einer einsamen Insel leben eine Bauern-, eine Zimmermanns- und eine Weberfamilie glücklich und zufrieden, indem sie ihre Arbeitsprodukte einträchtig untereinander aufteilen. Der Konsum der Produkte erfolgt nach dem Muster

	B	Z	W
B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
W	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

Die Lebensmittel werden also gleichmäßig aufgeteilt (1. Zeile), der Zimmermann stellt je ein Viertel seiner Arbeitskraft den beiden anderen zur Verfügung, ...

Eines Tages beschließen sie, „wie in einem zivilisierten Land“, Geld einzuführen.

Die Preise der drei Güter sollen dabei so gestalten werden, dass dennoch „alles beim Alten“ bleibt.

Güterflussgraph, Preisgraph

Damit jeder zufrieden ist, müssen die Preise so festgesetzt werden, dass für jeden der Wert der abgegebenen Güter gleich dem Wert der erhaltenen Güter ist, d.h.:

$$B: \left(\frac{p_b}{3}+\right)\frac{p_b}{3} + \frac{p_b}{3} = \left(\frac{p_b}{3}+\right)\frac{p_z}{4} + \frac{p_w}{2}$$

usw., d.h. folgendes *Preisgleichgewicht* soll gelten (wobei A die Matrix von oben ist):

$$\begin{aligned} p = (p_b, p_z, p_w)^t &= A^t p \\ p^t A &= p^t \end{aligned}$$

Schluss Die obigen Beispiele beleuchten ein Hauptproblem der mathematischen Wirtschaftstheorie:

Problem: Wann existiert, und wie findet man für eine Ökonomie ein geeignetes Preissystem unter dem (ein näher zu präzisierendes) Gleichgewicht herrscht?