10 Cournot-Nash-Gleichgewichte, Oligopole

Den bisher betrachteten Modellen für Ökonomien war gemeinsam, dass die Marktteilnehmer ein „preisnehmendes Verhalten“ zeigen.

Sie akzeptierten den (von der „invisible hand“) vorgegebenen Preis. Dies erscheint nur dann sinnvoll, wenn der einzelne keinen entscheidenden Einfluss auf den Markt nehmen kann (z.B. Landwirte).

Jetzt sollen Märkte betrachtet werden, wo eine kleine Zahl von Firmen im Wettbewerb stehen. solche Märkte nennt man *Oligopole.*

Wir betrachten das folgende einfache Modell:

Gegeben seien k Produzenten, welche den Markt eines bestimmten Gutes (welches hier als beliebig teilbar angenommen wird) alleine kontrollieren.

Das Verhalten der Masse der Konsumenten lässt sich beschreiben durch eine stetige, monoton fallende *inverse Nachfragefunktion*

$$p = f(x)$$

die zu jeder Menge x des Gutes den Preis p angibt, bei dem gerade die Menge x nachgefragt wird.

Die k Oligopolisten bieten nun gleichzeitig und unabhängig voneinander (Kartellgesetze verbieten Absprachen) je eine gewisse Menge des Gutes auf dem Markt an; der Oligopolist i die Menge x_i. Der Preis bestimmt sich dann so, dass gerade die Gesamtmenge $\sum_i x_i$ abgenommen wird, also $p = f(\sum_i x_i)$.

Der Erlös für den Oligopolisten ist $x_i \cdot f(\sum_i x_i)$.

$K_i(x_i)$ seien die Kosten, welche dem Oligopolisten i bei der Herstellung der Menge x_i entstehen.

Der Gewinn des Oligopolisten i beträgt demnach

$$a_i(x_1, \dots, x_k) = x_i \cdot f(\sum_i x_i) - K_i(x_i)$$

10.1. Beispiel (Monopol). Im Fall $k = 1$ spricht man von einem *Monopol* (diese sind meist staatlich). Hier ist der Gewinn des Monopolisten

$$a(x) = xf(x) - K(x)$$

mit z.B. $x \in \mathbb{R}_+$ oder $x \in [0, l]$, wobei l die Kapazitätsgrenze darstellt.

Der „Grenzgewinn“[12] ist

$$a'(x) = xf'(x) + f(x) - K'(x)$$

falls f und K differenzierbar sind.

Setzt man

$$\begin{aligned} f' &< 0 \quad \text{(wachsendes Angebot liefert fallenden Preis)} \\ f'' &\leqq 0 \quad (f \text{ konkav}) \\ \text{und } K'' &\geqq 0 \quad (K \text{ konvex}) \end{aligned}$$

[12] Dies ist eine Bezeichnung der Ökonomen.

voraus, so ergibt sich eine Situation wie in folgender Skizze :-)

Es folgt

$$a''(x) = \underbrace{x}_{\geqq 0}\underbrace{f''(x)}_{\leqq 0} + 2\underbrace{f'(x)}_{<0} - \underbrace{K''(x)}_{\geqq 0} < 0$$

d.h. a ist streng konkav; die optimale Produktion ergibt sich wenn der Grenzgewinn gleich null ist. Falls $a'(0) \leqq 0$ ($\Leftrightarrow f(0) \leqq K'(0)$), so führt jede Produktion zu einem Verlust.

Spezialfall (Cournot):
$p = f(x) = \max\{a - bx, 0\} =: (a - bx)^+$, mit $a > 0,\ b > 0$.

Es ergibt sich $a(x) = x(a - bx)^+$, und für $x < \frac{a}{b}$ weiterhin $a'(x) = a - 2bx$. Folglich ergibt sich die optimale Produktion bei $x^* = \frac{a}{2b}$, und $p^* = a - bx^* = \frac{a}{2}$.

Interpretation von Cournot: Der Monopolist ist der Besitzer einer Mineralquelle, es entstehen keine Produktions- und Vertriebskosten, d.h. $K \equiv 0$. ♢

Ein Oligopol kann als ein „nichtkooperatives k-Personenspiel“ interpretiert werden.

10.2. Definition. Ein *nichtkooperatives k-Personenspiel*

$$\Gamma = (X_1, \dots, X_k; a_1, \dots, a_k)$$

ist gegeben durch k nichtleere Mengen $X_1, \dots, X_k$, die Strategiemengen der Spieler, und durch reelle Funktionen $a_i : X_1 \times \cdots \times X_k \to \mathbb{R}$, die Auszahlungsfunktionen. Ein Tupel $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ heißt *Cournot-Nash-Gleichgewicht,* wenn für alle i und $x_i \in X_i$ gilt:

$$a_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_k^*) \geqq a_i(x_1^*, \dots x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_k^*)$$

10.3 Satz von Nikaido-Isoda

10.3. Satz. *Sei Γ ein nichtkooperatives k-Personenspiel (Bezeichnungen wie oben). Für jedes i gelte folgendes:*

i) X_i ist eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge eines euklidischen Raumes.

ii) a_i ist stetig, und jede Funktion

$$x_i \mapsto a_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_k) \quad y_j \in X_j,\ j \neq i$$

ist quasikonkav.

Dann besitzt Γ ein Cournot-Nash-Gleichgewicht.

Beweis. Man setze $S^i := X_i, \Psi^i(x_1, \ldots, x_k) = X_i$ und $\nu^i(y, x_i) = a_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_k)$ im Satz von Arrow-Debreu-Nash 8.17. □

10.4. Beispiel (Duopole). Ein Oligopol mit $k = 2$ Produzenten heißt *Duopol.*
Für eine Abbildung $\alpha : X_2 \to X_1$ mit

$$a_1(\alpha(x_2), x_2) = \max_{x_1 \in X_1} a_1(x_1, x_2)$$

heißt der Graph von α *Reaktionskurve* der Firma 1 (Analog für $\beta : X_1 \to X_2$).
Offensichtlich ist $(x^*, y^*) \in X_1 \times X_2$ ein Cournot-Nash-Gleichgewicht, falls

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha(y^*), \quad y^* = \beta(x^*) \\ x^* &= \alpha(\beta(x^*)), \quad y^* = \beta(\alpha(y^*)) \end{aligned}$$

Sonderfall (Cournot):
2 Besitzer von Mineralquellen:

$$f(x) = (a - bx)^+, \quad K_1 = K_2 \equiv 0$$

ergibt:

$$a_1(x_1, x_2) = x_1\big(a - b(x_1 + x_2)\big)^+$$

und für $x_1 + x_2 < \frac{a}{b}$ erhält man nach einer kleinen Rechnung als Cournot-Nash-Gleichgewicht

$$x_1 = \frac{a}{3b}, \qquad x_2 = \beta(x_1) = \frac{a}{3b}$$

Als Gewinn ergibt sich in diesem Fall $a_1(x_1^*, x_2^*) = \frac{a^2}{9b} = a_2(x_1^*, x_2^*)$ sowie $p^* = \frac{a}{3}$. ◇

10.4 Das Stackelberg'sche Führer-Folger-Prinzip

Das Prinzip unterstellt, dass ein Duopolist j (oBdA $j = 1$) der „Führer" ist, und der andere der „Folger".
Der Führer legt seine Produktionsstrategie x_1 fest unter der Annahme, dass der Folger x_2 aufgrund seiner Reaktionskurve wählt, d.h. $x_2 = \beta(x_1)$. Dann gilt

$$a_1(x_1, x_2) = a_1(x_1, \beta(x_1)) =: \tilde{a}_1(x_1)$$

Der Duopolist 1 maximiert sinnvollerweise $\tilde{a}_1$ mit x_1^* und der Folger wählt $x_2^* = \beta(x_1^*)$.
Diese Lösung (x_1^*, x_2^*) heißt *Stackelberg-Gleichgewicht.*
In obigem Sonderfall ergibt sich $x_1^* = \frac{a}{2b}$ und $x_2^* = \frac{a}{4b}$, sowie $p^* = \frac{a}{4}$. Der Wert der Auszahlungsfunktion beträgt $\frac{a^2}{8b}$ bzw. $\frac{a^2}{16b}$.

10.5 Satz von Wald

10.5. Satz. *Gegeben sei ein Oligopolspiel mit $X_i = [0, l_i]$, $l_i > 0$ (hier ist l_i die* Produktionskapazität*) und*

$$a_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i f(\sum_j x_j) - K_i(x_i)$$

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

a) $K_i(x) = K(x)$ mit $K : [0, \max l_i] \to [0, \infty)$.

b) $K' > 0$ und $K'' \geqq 0$ (K ist konvex und monoton steigend).

Es gibt ein $\xi > 0$ mit

c)

$$\xi \leqq \min l_i$$

und

d)

$$\begin{aligned} f(0) &> 0 \\ f(x) &= 0 \quad x \geqq \xi \\ f'(x) &< 0 \quad x \in [0, \xi] \\ f''(x) &\leqq 0 \quad x \in [0, \xi] \end{aligned}$$

(wobei bei 0 die rechtsseitige Ableitung, bei ξ die linksseitige Ableitung betrachtet wird.)

Dann existiert genau ein Cournot-Nash-Gleichgewicht $y^* = (y_1^*, \ldots, y_k^*)$, und zwar:
$y^* = 0$ falls $K'(0) > f(0)$;
andernfalls $y_i^* = t^*$ für alle i, wobei t^* die einzige Nullstelle von ψ im Intervall $(0, \frac{\xi}{k})$ ist. Hier ist

$$\psi(t) = f(kt) + tf'(kt) - K'(t)$$

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst:
Ist y^* ein Cournot-Nash-Gleichgewicht, so muss es die im Satz angegebene Form haben.
Setze

$$\varphi_i(x_i) := a_i(y_1^*, \ldots, x_i, \ldots, y_k^*) \quad (= x_i f(x_i + \sum_{j \neq i} y_j^*) - K(x_i))$$

Dann ist y^* ein Cournot-Nash-Gleichgewicht genau dann wenn

$$\varphi_i(y_i^*) = \max_{x_i \in X_i} \varphi_i(x_i) \qquad \text{für alle } i \text{ gilt.}$$

Es muss $\sum_j y_j^* \leqq \xi$ gelten, denn:
Aus $\sum y_j^* > \xi$ folgt $p = f(\sum y_j^*) = 0$, was wiederum $\varphi_i(y_i^*) = -K(y_i^*) < -K(x_i) = \varphi_i(x_i)$ zur Folge hätte (wobei $x_i < y_i^*$ ist, so dass immer noch $x_i + \sum_{j \neq i} y_j^* > \xi$ gilt; die Ungleichung folgt, weil K streng monoton wachsend ist). Das wäre ein Widerspruch zur Maximierungseigenschaft eines Cournot-Nash-Gleichgewichts.

Für $x_i \in [0, \xi - \sum_{j\neq i} y_j^*]$ existiert $\varphi_i''(x_i)$ und es gilt

$$\varphi_i'(x_i) = f(x_i + \sum_{j\neq i} y_j^*) + x_i f'(x_i + \sum_{j\neq i} y_j^*) - K'(x_i) \tag{10.1}$$

$$\varphi_i''(x_i) = 2\underbrace{f'(x_i + \sum_{j\neq i} y_j^*)}_{<0} + x_i \underbrace{f''(x_i + \sum_{j\neq i} y_j^*)}_{\leqq 0} - \underbrace{K''(x_i)}_{\geqq 0} < 0 \tag{10.2}$$

Es ist $\varphi_i(0) = -K(0) \leqq 0$ und

$$\varphi_i'(\xi - \sum_{j\neq i} y_j^*) = \underbrace{f(\xi)}_{=0} + \underbrace{(\xi - \sum_{j\neq i} y_j^*)}_{\geqq 0}\underbrace{f'(\xi)}_{<0} - \underbrace{K'(\xi - \sum_{j\neq i} y_j^*)}_{>0} < 0$$

Für $x_i \in (\xi - \sum_{j\neq i} y_j^*, l_i)$ ist

$$\varphi_i(x_i) = -K(x_i)$$
$$\varphi_i'(x_i) = -K'(x_i) < 0 \tag{10.3}$$
$$\varphi_i''(x_i) = -K''(x_i) \leqq 0 \tag{10.4}$$

Fall 1: $K'(0) \geqq f(0)$. Hier gilt

$$\varphi_i'(0) = f(\sum_{j\neq i} y_j^*) - K'(0) \underset{f'|_{[0,\xi]}<0}{\leqq} f(0) - K'(0) \leqq 0$$

Mit (10.2) und (10.3) folgt, dass φ_i streng monoton fallend auf $[0, l_i]$ ist. Folglich ist $y^* = 0$ die einzige Lösung des Maximierungsproblems, d.h. das einzige Cournot-Nash-Gleichgewicht.

Fall 2: Gelte $K'(0) < f(0)$.

Wäre $y^* = 0$, so folgt aus (10.1):

$$\varphi_i'(0) = f(0) - K'(0) > 0$$

ein Widerspruch (da in diesem Fall φ_i bei 0 kein Maximum annimmt).

Sei also $y_l^* > 0$ für ein l. Dann gilt

$$0 = \varphi_l'(y_l^*) = f(\sum y_j^*) + \underbrace{y_l^* f'(\sum y_j^*)}_{<0} - K'(y_l^*) < f(\sum y_j^*) - K'(0)$$

Wäre ein $y_i^* = 0$, so könnte man folgern

$$0 < f(\sum y_j^*) - K'(0) \underset{(10.1)}{=} \varphi_i'(0)$$

Das steht im Widerspruch zu $\varphi_i'(0) \leqq 0$, was für ein Maximum von φ_i bei 0 nötig wäre. Also ist $y_i^* > 0$ für alle i. Nun gilt

$$0 = \varphi_i'(y_i^*) = f(\sum y_j^*) + y_i^* f'(\sum y_j^*) - K'(y_i^*) \tag{10.5}$$

folglich

$$(y_i^* - y_l^*)\underbrace{f'(\sum y_j^*)}_{<0} = K'(y_i^*) - K'(y_l^*)$$

Falls nun $y_i^* > y_l^*$ gelten würde, hätten wir einen Widerspruch zu $K'' \geqq 0$, also

$$y_1^* = \cdots = y_k^* =: t^*$$

Die Bedingung $t^* \leqq \frac{\xi}{k}$ folgt sofort aus

$$kt^* = \sum y_j^* \leqq \xi$$

Aus Gleichung (10.5) erhalten wir nun

$$\psi(t^*) := f(kt^*) + t^* f'(kt^*) - K'(t^*) = 0$$

Wir haben

$$\psi(0) = f(0) - K'(0) > 0$$

$$\psi\left(\frac{\xi}{k}\right) = \underbrace{f(\xi)}_{=0} + \underbrace{\frac{\xi}{k} f'(\xi)}_{<0} - \underbrace{K'\left(\frac{\xi}{k}\right)}_{>0} < 0$$

$$\psi'(x) = \underbrace{kf'(kx)}_{<0} + \underbrace{kxf''(kx)}_{\leqq 0} + \underbrace{f'(kx)}_{<0} - \underbrace{K''(x)}_{\geqq 0} < 0 \quad \text{für } x < \frac{\xi}{k}$$

Das zeigt, dass ψ genau eine Nullstelle auf $[0, \frac{\xi}{k}]$ hat.

2. Für Fall 1 sind beide Richtungen klar. Also nehmen wir $K'(0) < f(0)$ an. Wir haben oben allgemein gesehen, dass ψ eine Nullstelle t^* in $(0, \frac{\xi}{k})$ hat und behaupten, dass $y^* = t^* e$ ein Cournot-Nash-Gleichgewicht ist.

   Zunächst haben wir, dass $\sum y_j^* < \xi$ ist. Mit (10.3) können wir schließen, dass ein Maximum z_i^* von φ_i in $[0, \xi - (k-1)t^*]$ liegen muss. Es gilt:

   $$\varphi_i'(0) = f((k-1)t^*) - K'(0) \underset{f'<0, K''\geqq 0}{>} f(kt^*) + t^* f'(kt^*) - K'(t^*) = \psi(t^*) = 0$$

   Daher gilt $z_i^* > 0$, und nach (10.2) ist z_i^* die eindeutig bestimmte einzige Nullstelle von φ_i'. Wegen $\varphi_i'(t^*) = \psi(t^*) = 0$ folgt $z_i^* = t^*$.

   Das zeigt, dass t^* die Funktion φ_i maximiert, also ist y^* ein Cournot-Nash-Gleichgewicht. □

Literatur zu Kapitel 10: [**Au**] zu 10.4; [**SF**] J. Szép und F. Forgó H. Deutsch (1983) zum Satz von Wald (hier wird auch der Mehrgüterfall behandelt)