7 Das Minimaxprinzip von Ky Fan

$z^0, \dots, z^r$ seien $r+1$ Punkte im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, die einen r-dimensionalen affinen Teilraum aufspannen. Wir definieren

$$S := \operatorname{conv}\{z^0, \dots, z^r\} = \left\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i z^i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 \right\}$$

die *konvexe Hülle* von $\{z^0, \dots, z^r\}$ oder das von $z^0, \dots, z^r$ *aufgespannte Simplex*. Die z^i heißen *Ecken* von S. Die *baryzentrischen Koordinaten* $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ des Punktes z sind eindeutig bestimmt. Für $\{z^{j_1}, \dots, z^{j_k}\} \subset \{z^0, \dots, z^r\}$ heißt $\operatorname{conv}\{z^{j_1}, \dots, z^{j_k}\}$ das von $z^{j_1}, \dots, z^{j_k}$ aufgespannte *Seitensimplex*. Für $z = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i z^i$ heißt $\operatorname{conv}\{z^i : \lambda_i > 0\}$ der *Träger* von z. Eine Unterteilung von S in endlich viele Simplizes, so dass der Schnitt von je zwei entweder leer oder ein gemeinsames Seitensimplex ist, heißt *simpliziale Unterteilung* von S.

7.1 Lemma von Sperner

7.1. Lemma. *Ist Λ eine simpliziale Unterteilung von S und φ eine Abbildung, die jeder Ecke z eines Simplizes aus Λ eine Ecke $\varphi(z)$ des Trägers von z in S zuordnet, so existiert ein r-dim. Simplex $T = \operatorname{conv}\{\bar{z}^0, \dots, \bar{z}^r\}$ in Λ mit $\varphi(\{\bar{z}^0, \dots, \bar{z}^r\}) = \{z^0, \dots, z^r\}$.*

Beweis. Ein Simplex $T \in \Lambda$ heiße „lieb“, wenn es die geforderte Eigenschaft hat. Wir zeigen: Die Anzahl der lieben $T \in \Lambda$ ist ungerade (insbesondere ungleich 0).

Beweis mittels Induktion über r:

Der Induktionsanfang $r = 0$ ist klar.

Wir schließen von $r-1$ auf r: Die Behauptung gelte also für $(r-1)$-dimensionale Simplizes.

1. $T_1, T_2, \dots, T_\rho$ seien die r-dimensionalen Simplizes von Λ. Ein $(r-1)$-dimensionales Seitensimplex V von T_ν heiße „lieb“, wenn $\varphi(\text{Ecken von } V) = \{z^1, \dots, z^r\}$ ist.

   a_ν sei die Anzahl der lieben V's in T_ν.

   (a) *Ist T_ν lieb, so hat es genau ein liebes Seitensimplex V.* Denn sei $T_\nu = \operatorname{conv}\{b^0, \dots, b^r\}$ und gilt (oBdA) $\varphi(b^i) = z^i$ für alle i, so ist $V = \operatorname{conv}\{b^1, \dots, b^r\}$ die einzige liebe Seite.

   (b) *Ist T_ν nicht lieb, so hat T_ν keine oder genau zwei liebe Seiten.*
   Denn sei $V = \operatorname{conv}\{b^1, \dots, b^r\}$ eine liebe Seite. Wieder nehmen wir oBdA an, dass $\varphi(b^i) = z^i$ für alle $i > 0$ gilt. Da T_ν nicht lieb ist, gilt $\varphi(b^0) = z^j$ mit $j \neq 0$. Dann ist $V' := \operatorname{conv}(\{b^0, \dots, b^r\} \setminus \{b^j\})$ lieb (und kein anderes Seitensimplex kann lieb sein). Somit gilt:

   $$\sum_\nu a_\nu = \sum_{\nu : T_\nu \text{ lieb}} \underbrace{a_\nu}_{1} + \sum_{\nu : T_\nu \text{ nicht lieb}} \underbrace{a_\nu}_{0 \text{ oder } 2}$$

   Es genügt also zu zeigen: $\sum_\nu a_\nu$ ist ungerade.

2. Sei V eine liebe Seite. Es gibt zwei Fälle:

   (a) V liegt im Inneren von S. Dann ist V Seitensimplex von 2 T_νs, und V wird in der obigen Summe zweimal gezählt.

   (b) V liegt am Rand von S, insbesondere auf einem $(r-1)$-dimensionalen Seitensimplex U von S. In diesem Fall ist V Seitensimplex von genau einem T_ν, wird also in der obigen Summe einfach gezählt.

   Für jede Ecke z von V muss $\varphi(z)$ Ecke von U sein (aufgrund der Definition von φ). Also gilt $U = \operatorname{conv}\{z^1, \dots, z^r\}$, und dieses U ist universal für alle V aus Fall (b).

Durch Λ wird auf U eine simpliziale Zerlegung Λ' der in U liegenden Seitensimplizes definiert.

Die lieben Seiten V auf U sind genau die lieben T' in Λ'. Die Behauptung folgt nun aus der Induktionsvoraussetzung. □

7.2 Satz von Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz

7.2. Satz (KKM-Theorem). $S = \operatorname{conv}\{z^0, \dots, z^r\}$ *sei ein r-dimensionales Simplex im euklidischen Raum. $C_0, \dots, C_r$ seien abgeschlossene Teilmengen von S mit der Eigenschaft*

$$\emptyset \neq J \subset \{0, \dots, r\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{conv}\{z^j : j \in J\} \subset \bigcup_{j \in J} C_j$$

Dann ist $\bigcap_{i=0}^{r} C_i \neq \emptyset$.

Beweis. Es existiert eine Folge simplizialer Unterteilungen Λ_n von S derart, dass der maximale Durchmesser der T_ν aus Λ_n gegen Null geht (für $n \to \infty$).

Definiere φ_n auf $\{z : z \text{ Ecke in } \Lambda_n\}$ wie folgt:

Für die Ecke z sei $\text{Träger}(z) = \operatorname{conv}\{z^{j_1}, \dots, z^{j_s}\}$. Nach Voraussetzung gilt: $\text{Träger}(z) \subset \bigcup_{k=1}^{s} C_{j_k}$.

Wähle j_k mit $z \in C_{j_k}$ und setze $\varphi_n(z) = z^{j_k}$.

Nach dem Lemma von Sperner gibt es T_n aus Λ_n, so dass $T_n = \operatorname{conv}\{z^{0^{(n)}}, \dots, z^{r^{(n)}}\}$ sowie

$$\varphi_n(\{z^{0^{(n)}}, \dots, z^{r^{(n)}}\} = \{z^0, \dots, z^r\}$$

Sei nun oBdA $\varphi_n(z^{i^{(n)}}) = z^i$, also $z^{i^{(n)}} \in C_i$ für alle i.

Da S kompakt ist, gibt es (für alle i) eine konvergente Teilfolge $z^{i^{(n_k)}}$. Der Grenzwert sei z^{i*}. Es gilt $z^{i^{(n_k)}} \in C_i$. Da C_i abgeschlossen ist folgt $z^{i*} \in C_i$. Der Durchmesser von $\operatorname{conv}\{z^{0^{(n)}}, \dots, z^{r^{(n)}}\}$ geht gegen 0, also muss $z^{0*} = z^{1*} = \dots = z^{r*}$ gelten, mithin $z^{0*} \in \bigcap_{i=0}^{n} C_i$. □

Das Ergebnis des vorigen Satzes kann man verallgemeinern:

7.3 Satz von Ky Fan

7.3. Satz. *Seien X, Z Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ und X kompakt. Zu jedem $z \in Z$ sei eine abgeschlossene Teilmenge $F(z) \subset X$ gegeben mit*

$$\operatorname{conv}\{z^1, \ldots, z^n\} \subset F(z^1) \cup \cdots \cup F(z^n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, z^1, \ldots, z^n \in Z$$

Dann ist $\bigcap_{z \in Z} F(z) \neq \emptyset$.

Beweis. Aufgrund der Heine-Borel Eigenschaft genügt es zu zeigen, dass der Schnitt von endlich vielen $F(z^1), \ldots, F(z^n)$ nicht leer ist (dann können die Komplemente der $F(z)$ keine offene Überlagerung des Kompaktums X liefern).

Betrachten wir also endlich viele $z_1, \ldots, z_n \in Z$.
Wir definieren $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{R}^k$ durch $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$. Dann definieren wir

$$C_i := f^{-1}(F(z_i))$$

Diese Mengen sind abgeschlossen, da f stetig ist. Wir wollen den vorigen Satz anwenden. Also müssen wir die Voraussetzung überprüfen. Sei also $\emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, n\}$. Wir wollen zeigen, dass $\operatorname{conv}\{e^j : j \in J\} \subset \bigcup_{j \in J} C_j$ gilt.

Sei also $t = \sum_{j \in J} \lambda_j e^j$. Dann ist

$$f(t) = \sum_{j \in J} \lambda_j z_j \in \operatorname{conv}\{z_j : j \in J\} \subset \bigcup_{j \in J} F(z_j)$$

(die letzte Inklusion gilt nach Voraussetzung), und wir schließen

$$t \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} F(z_j)\right) = \bigcup_{j \in J} C_j$$

Also können wir das KKM-Theorem anwenden und erhalten die Existenz eines $t^* \in \bigcap_{i=1}^n C_i$. Somit gilt $f(t^*) \in \bigcap_{i=1}^n (F(z_i))$, was den Beweis vollendet. □

7.4 Ky Fansches Minimaxprinzip

7.4. Satz. *Sei X eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ und $f : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:*

a) $f(x, \cdot)$ ist uhs für alle $x \in X$.

b) $f(\cdot, y)$ ist quasikonkav für alle $y \in X$.

Dann gilt $\min_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x, y) \leqq \sup_{x \in X} f(x, x)$.

Bemerkung (⊛):
Insbesondere gibt es nach dem Minimaxprinzip ein y_0 mit $\sup_{x \in X} f(x, y_0) \leqq \sup_{x \in X} f(x, x)$.

Beweis. Nach Lemma 5.3.d ist $\sup_{x \in X} f(x, \cdot)$ uhs.
Dann existiert nach 5.2 das Minimum $\min_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x, y)$.

Sei $\mu := \sup_{x \in X} f(x, x)$. Wir nehmen $\mu \in \mathbb{R}$ an, andernfalls sind wir fertig (denn $\mu > -\infty$ gilt trivialerweise).

$F(x) := \{y \in X : f(x, y) \leqq \mu\}$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung. Wir behaupten, dass

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$$

Nach dem Satz von Ky Fan genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^n\} \subset \bigcup_{i=1}^n F(x^i)$ für alle $x^i \in X$, $i \leqq n \in \mathbb{N}$.

Nehmen wir an, es gäbe $z^1, \ldots, z^n$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{P}^n$ mit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i z^i \notin \bigcup_{i=1}^n F(z^i)$$

Dann folgt $f(z^i, \sum_{i=1}^n \alpha_i z^i) > \mu$ für alle $i \leqq n$.

Da f quasikonkav ist, folgt $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i z^i, \sum_{i=1}^n \alpha_i z^i) > \mu$, ein Widerspruch.

Nach dem Satz von Ky Fan gibt es ein $y_0 \in \bigcap_{x \in X} F(x)$, also $f(x, y_0) \leqq \mu$ für alle $x \in X$.

Nun folgt

$$\min_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x, y) \leqq \sup_{x \in X} f(x, y_0) \leqq \mu$$ □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun den Beweis des Hauptsatzes der Spieltheorie (Lemma 2.3) nachholen.

Beweis des Hauptsatzes der Spieltheorie

Satz: *Zu jeder $(m \times n)$-Matrix G existiert ein $\bar{p} \in \mathbb{P}^m$ und ein $\bar{q} \in \mathbb{P}^n$, so dass gilt:*

$$p^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G q \qquad \forall p \in \mathbb{P}^m, \ q \in \mathbb{P}^n$$

Beweis. Wir definieren

$$f : (\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \times (\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \to \mathbb{R}$$
$$((p, q), (\tilde{p}, \tilde{q})) \mapsto p^t G \tilde{q} - \tilde{p}^t G q$$

Es gilt $f((p, q), (p, q)) = 0$ für alle p, q. Ferner ist f stetig (insbesondere im zweiten Argument), sowie affin linear im ersten Argument, also quasikonkav im ersten Argument.

Aus dem Ky Fanschen Minimaxprinzip erhalten wir die Existenz eines $(\bar{p}, \bar{q})$, für das gilt:

$$\sup_{(p,q)} f((p, q), (\bar{p}, \bar{q})) \leqq \sup_{(p,q)} f((p, q), (p, q)) = 0$$

Wir haben also

$$0 \geqq f((p, q), (\bar{p}, \bar{q})) = p^t G \bar{q} - \bar{p}^t G q$$

Hieraus können wir mit $q = \bar{q}$ bzw. $p = \bar{p}$ auf

$$p^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G q$$

schließen. □

Wir können jetzt auch den Satz von Sloss (3.10) wie folgt variieren:

7.5. Satz (Ky Fan-Sonnenschein). *Sei X eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\succeq$ eine binäre Relation auf X derart, dass für die zugehörige strikte Relation $\succ$ gilt:*

i) $x \notin \operatorname{conv}(O(\succ, x))$ *für alle* $x \in X$.

ii) Für alle $y \in U(\succ, x)$ *gibt es ein* $z \in X$ *so, dass* y *ein innerer Punkt von* $U(\succ, z)$ *ist.*

Dann ist $\max(X, \succeq)$ *abgeschlossen und nicht leer.*

Beweis. 1. Sei $U^0(\succ, z)$ die Menge der inneren Punkte von $U(\succ, z)$.

$$\max(X, \succeq) \underset{(1)}{=} \bigcap_{x \in X} (U(\succ, x))^C \underset{(2)}{=} \underbrace{\bigcap_{x \in X} \underbrace{(U^0(\succ, x))^C}_{\text{abgeschlossen}}}_{\text{abgeschlossen}}$$

Diese Aussage müssen wir rechtfertigen:

„mitte“ $\subset$ „rechts“ ist klar. Zu (1):

$$y \in \max(X, \succeq) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X : x \not\succ y \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X : y \notin U(\succ, x)$$

Zu „rechts“ $\subset$ „mitte“: Sei $y \notin \bigcap_{x \in X} (U(\succ, x))^C$. Dann gibt es ein x_0 mit $y \in U(\succ, x_0)$; nach Voraussetzung (ii) gibt es dann auch ein z mit $y \in U^0(\succ, z)$, d.h. $y \notin \bigcap_{x \in X} (U^0(\succ, x))^C$.

2. Es verbleibt zu zeigen, dass die Menge der maximalen Elemente nicht leer ist. Sei dazu

$$F(x) := (U^0(\succ, x))^C$$

Diese Menge ist für alle $x \in X$ abgeschlossen. Sei

$$y \in \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^m\}$$

Angenommen, $y \notin \bigcup_{i=1}^m F(x^i)$. Dann ist

$$y \in \bigcap_{i=1}^m U^0(\succ, x^i) \subset \bigcap_{i=1}^m U(\succ, x^i)$$

also insbesondere $y \prec x^i$ für alle i; anders formuliert: $x^i \in O(\succ, y)$ für alle i. Dann ist $y \in \operatorname{conv}(O(\succ, y))$, im Widerspruch zur Annahme (i).

Damit sind die Voraussetzungen für den Satz von Ky Fan erfüllt, was den Beweis beendet. □

7.6. Bemerkung. a) Ist $\succeq$ eine schwach konvexe Präferenzordnung auf X, so gilt 7.5.i (nach Satz 3.9).

b) Ist jedes $U(\succ, x)$ offen, so gilt 7.5.ii.

Literatur zu Kapitel 7: [**Au**], [**Ich**]