9 Gleichgewichte in Ökonomien mit Privateigentum

Wir erweitern das Konzept der reinen Tauschökonomie, indem wir auch die Möglichkeit der Produktion von Gütern mit einbeziehen:

Wie in Kapitel 4 betrachten wir eine Ökonomie mit n Gütern und m Konsumenten; daneben seien k Produzenten gegeben.

Sei also

$$\begin{aligned} M &:= \{1,\ldots,m\} && \text{die Menge der Konsumenten und} \\ K &:= \{1,\ldots,k\} && \text{die Menge der Produzenten.} \end{aligned}$$

Wie in Kapitel 4 sei jedem $i \in M$ eine *Konsummenge* $X^i \subset \mathbb{R}^n$ versehen mit einer Präferenzrelation $\succeq^i$, sowie eine *Grundausstattung* $a^i \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Analog sei für $j \in K$ eine nichtleere Menge $Y^j \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, der *Aktionsbereich* des Produzenten j.

$$\begin{aligned} x^i \in X^i: \ & x_l^i > 0\text{: die Menge } x_l^i \text{ des Gutes } l \text{ wird konsumiert.} \\ & x_l^i < 0\text{: die Menge } |x_l^i| \text{ des Gutes } l \text{ wird abgegeben.} \\ y^j \in Y^j: \ & y_l^j > 0\text{: die Menge } y_l^j \text{ des Gutes } l \text{ wird produziert(Output).} \\ & y_l^j < 0\text{: die Menge } |y_l^j| \text{ des Gutes } l \text{ wird in den Produktionsprozess eingebracht (Input).} \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass sich die Produktionsstätten – etwa in der Form von Aktien – ganz in den Händen der Konsumenten befinden. („private ownership economy“)

Der Konsument $i \in M$ sei mit dem Anteil θ_{ij} ($\geqq 0$) an der Produktionsstätte $j \in K$ beteiligt, es sei also

$$\sum_{i \in M} \theta_{ij} = 1 \qquad \forall j \in K$$

Unter dem Preis $p \in \mathbb{P}^n$ ist $p^t y^j$ der (Netto-)Gewinn des Produzenten j, wenn er den Produktionsplan $y^j \in Y^j$ wählt. Setzt man

$$\rho^j(p) := \sup_{y^j \in Y^j} p^t y^j$$

so ist

$$r^i(p) := p^t a^i + \sum_{j \in K} \theta_{ij} \rho^j(p)$$

das *Budget* des Konsumenten i unter dem Preisvektor p.

Eine *Ökonomie mit Privateigentum* $\mathcal{P}$ (kurz: *P-Ökonomie*) wird demnach beschrieben durch ein Tupel

$$\mathcal{P} = \left(\left(X^i, \succeq^i, a^i\right)_{i \in M}, (\theta_{ij})_{i \in M}^{j \in K}, \left(Y^j\right)_{j \in K} \right)$$

Wieder sei

$$B^i(p, r^i) = \left\{ x^i \in X^i : p^t x^i \leqq r^i(p) \right\}$$

die *Budgetmenge* des Konsumenten i.

$$B^i : \mathbb{P}^n \to \mathcal{P}(X^i) \text{ mit } B^i(p) := B^i(p, r^i(p))$$

ist die *Budgetkorrespondenz*, und

$$D^i : \mathbb{P}^n \to \mathcal{P}(X^i) \text{ mit } D^i(p) := \max(B^i(p), \succeq^i)$$

ist die *Nachfragekorrespondenz* (Menge der von Konsument i erwünschten Güterbündel).

Die *Gewinnkorrespondenz* für den Produzenten j sei

$$G^j : \mathbb{P}^n \to \mathcal{P}(Y^j) \text{ mit } G^j(p) := \left\{ y^j \in Y^j : p^t y^j = \max_{z^j \in Y^j} p^t z^j \right\}$$

9.1 Definition. Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie (mit den Bezeichnungen wie oben). Dann heißt ein Tupel $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \in X \times Y \times \mathbb{P}^n$ mit $X = \prod_{i \in M} X^i$, $Y = \prod_{j \in K} Y^j$ ein *Gleichgewicht*, wenn gilt:

i) $\bar{x}^i \in D^i(\bar{p})$ für alle $i \in M$.

ii) $\bar{y}^j \in G^j(\bar{p})$ für alle $j \in K$.

iii) $\sum_{i \in M} \bar{x}^i \leqq \sum_{j \in K} \bar{y}^j + a$ mit $a = \sum_{i \in M} a^i$.

Das Gleichgewicht heißt *Walras-Gleichgewicht*, wenn gilt:

$$\bar{p}^t \left(\sum_{i \in M} \bar{x}^i - \sum_{j \in K} \bar{y}^j - a \right) = 0$$

9.2 Bemerkung. Ist $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i \in M}$ eine reine Tauschökonomie, so wird durch $\mathcal{P} = (\mathcal{E}, (\theta_{i1})_{i \in M}, Y^1)$ mit $Y^1 = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ und z.B.: $\theta_{i1} = \frac{1}{m}$ (für alle i) eine P-Ökonomie definiert und $(\bar{x}, \bar{p})$ ist ein TGL in $\mathcal{E}$ genau dann wenn $(\bar{x}, 0, \bar{p})$ ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$ ist.

9.3 Beispiel. Wir betrachten eine P-Ökonomie mit einem Produzenten, einem Konsumenten und zwei Gütern (d.h. $m = k = 1$, $n = 2$). Gut 1 sei ein Konsumgut, welches als Output des Produktionsprozesses auftritt und Gut 2 sei Arbeit, welche als Input für den Produktionsprozess benötigt wird und vom Konsumenten abgegeben wird. Der Konsument kann ganz über die Produktion verfügen.

Modell: $x^1 = \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix}$, $x \geqq 0$, $0 \geqq z \leqq 1$ (Der Konsument kann höchstens eine Einheit Arbeit leisten.)

$y^1 = \begin{pmatrix} \alpha y \\ -y \end{pmatrix}$, $y \geqq 0$ mit festem $\alpha \in (0,1]$.

Eine Einheit Arbeit (Input) produziert α Einheiten des Konsumguts (Output).

Kein Erstbesitz, d.h. $a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Präferenzordnung des Konsumenten sei durch die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

$$u(x,z) = \alpha \log x + (1-\alpha) \log \underbrace{(1-z)}_{\text{Freizeit}}$$

gegeben. Wir haben

$$r^1(p) = \underbrace{p^t a^1}_{=0} + \rho^1(p) = \sup_{z^1 \in Y^1} p^t z^1 = \sup_{y \geqq 0} (\alpha p_1 - p_2) y = \begin{cases} 0 & \alpha p_1 \leqq p_2 \\ \infty & \alpha p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$B^1(p, r^1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix} : p_1 x - p_2 z \leqq r^1(p) \right\}$$

$$= \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix} : p_1 x \leqq p_2 z \right\} & \text{falls } \alpha p_1 \leqq p_2 \\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix} : x \geqq 0, z \in [0,1] \right\} & \text{falls } \alpha p_1 > p_2 \end{cases}$$

Fortsetzung: Übung. $\diamondsuit$

In einer P-Ökonomie sei jedes $\succeq^i$ durch eine Nutzenfunktion u^i darstellbar. Dann kann $\mathcal{P}$ wie folgt eine abstrakte Ökonomie

$$\mathcal{A} = (S^l, \Psi^l, v^l)_{l=1}^h \qquad \text{mit } h = m + k + 1$$

zugeordnet werden. Die Akteure sind dabei die m Konsumenten, die k Produzenten und ein zusätzlicher fiktiver Akteur (nach Adam Smith: „invisible hand"). Der Akteur $m+k+1$ „regelt die Preise", d.h. es ist

$$\begin{aligned} S^l &= X^l && \text{für } 1 \leqq l \leqq m \\ S^l &= Y^{l-m} && \text{für } m < l \leqq m+k \\ S^{m+k+1} &= \mathbb{P}^n \end{aligned}$$

$$X := \prod_{i=1}^m X^i, \; Y = \prod_{j=1}^k Y^j, \; S := X \times Y \times \mathbb{P}^n$$

$$\Psi^l(x,y,p) = \begin{cases} B^l(p) & 1 \leqq l \leqq m \\ Y^{l-m} & m < l \leqq k+m \\ \mathbb{P}^n & l = m+k+1 \end{cases}$$

Die Nutzenfunktion v^l sei definiert gemäß

$$\begin{aligned} v^l\big((x,y,p), \tilde{x}^l\big) &= u^l(\tilde{x}^l) && 1 \leqq l \leqq m, \quad \tilde{x}^l \in X^l \\ v^l\big((x,y,p), \tilde{y}^{l-m}\big) &= p^t \tilde{y}^{l-m} && m < l \leqq m+k, \quad \tilde{y}^{l-m} \in Y^{l-m} \\ v^{m+k+1}\big((x,y,p), q\big) &= q^t \left(\sum_{i \in M} x^i - \sum_{j \in K} y^j - a \right) && q \in \mathbb{P}^n \end{aligned}$$

9.4 Lemma. *Ordnet man der P-Ökonomie wie oben die abstrakte Ökonomie $\mathcal{A}$ zu, so gilt:*

a) Jedes soziale Gleichgewicht in $\mathcal{A}$ ist ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$.

b) Jedes Walras'sche Gleichgewicht in $\mathcal{P}$ ist ein soziales Gleichgewicht in $\mathcal{A}$.

Beweis. *a)* Sei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ ein soziales Gleichgewicht in $\mathcal{A}$:

Für $1 \leqq i \leqq m$ haben wir nach (SG2): $u^i(\bar{x}^i) \geqq u^i(x^i)$ für alle $x^i \in \Psi^i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = B^i(\bar{p})$.
Mit (SG1) erhalten wir desweiteren $\bar{x}^i \in B^i(\bar{p})$. Diese beiden Tatsachen zeigen, dass Eigenschaft (i) eines Gleichgewichts erfüllt ist.

Für $m < l \leqq m+k$ haben wir nach (SG2): $\bar{p}^t \bar{y}^j \geqq \bar{p}^t y^j$ für alle $y^j \in \Psi^j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = Y^j$. Das bedeutet, dass Eigenschaft (ii) eines Gleichgewichts erfüllt ist.
Für Eigenschaft (iii) sehen wir, dass

$$\bar{p}^t \left(\sum_{i \in M} \bar{x}^i - \sum_{j \in K} \bar{y}^j - a \right) \geqq p^t \left(\sum_{i \in M} \bar{x}^i - \sum_{j \in K} \bar{y}^j - a \right) \tag{9.1}$$

für alle $p \in \mathbb{P}^n$ gilt. Nun rechnen wir

$$\begin{aligned} \bar{x}^i \in B^i(\bar{p}) \quad &\Rightarrow \quad \bar{p}^t \bar{x}^i \leqq r^i(\bar{p}) = \bar{p}^t a^i + \sum_j \theta_{ij} \bar{p}^t \bar{y}^j \\ &\Rightarrow \quad \bar{p}^t \left(\sum_{i \in M} \bar{x}^i \right) \leqq \bar{p}^t \left(\sum_{i \in M} a^i \right) + \sum_j \underbrace{\left(\sum_i \theta_{ij} \right)}_{=1} \bar{p}^t \bar{y}^j \\ &\Rightarrow \quad \bar{p}^t \left(\sum \bar{x}^i - \sum \bar{y}^j - a \right) \leqq 0 \\ &\Rightarrow \quad p^t \left(\sum \bar{x}^i - \sum \bar{y}^j - a \right) \leqq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt für alle $p \in \mathbb{P}^n$ aufgrund von (9.1). Damit erhalten wir

$$\sum \bar{x}^i \leqq \sum \bar{y}^j + a$$

(indem wir nacheinander $p = e^l$ für $l \leqq n$ einsetzen), was Eigenschaft (iii) zeigt.

b) Übung. $\square$

9.5 Lemma. *Gegeben sei eine P-Ökonomie $\mathcal{P}$.*

a) Für $i \in M$ sei r^i stetig, X^i abgeschlossen und konvex und es gelte

$$\text{Für alle } p \in \mathbb{P}^n \text{ existiert ein } \tilde{x}^i \in X^i \text{ mit } p^t \tilde{x}^i < r^i(p) \tag{9.2}$$

Dann gilt:

i) $B^i(p)$ ist nicht leer, abgeschlossen und konvex (für alle p).
ii) Gr B^i ist abgeschlossen.
iii) B^i ist uhs.
iv) Ist X^i kompakt, so ist B^i stetig.
v) Ist X^i kompakt und $\succeq^i$ eine abgeschlossene Präferenzordnung, so ist D^i ohs.
vi) Ist $\succeq^i$ eine ohs Präferenzordnung, so ist $D^i(p)$ abgeschlossen für alle p.

b) Für $j \in K$ gilt:

vii) $Gr\, G^j$ ist abgeschlossen.

viii) Ist Y^j kompakt und konvex, so ist G^j ohs, und für alle p ist $G^j(p)$ konvex, kompakt und nicht leer.

Beweis. *i)* Wegen (9.2) ist $B^i(p)$ nicht leer. Abgeschlossenheit und Konvexität sind klar, da die Bedingung linear und abgeschlossen ist.

ii) Die Menge $Gr\Phi = \{(p,x) : p^t x \leqq r^i(p)\}$ ist abgeschlossen, da alle beteiligten Funktionen stetig sind.

iii) (⊛) Sei $\bar{p} \in \mathbb{P}^n$ und $G \subset X^i$ offen mit $B^i(\bar{p}) \cap G \neq \emptyset$.

Sei $\bar{x}^i \in B^i(\bar{p}) \cap G$.
Falls $\bar{p}^t \bar{x}^i < r^i(\bar{p})$ ist, so ist die Menge $U := \{p \in \mathbb{P}^n : p^t \bar{x}^i < r^i(p)\}$ eine offene Umgebung von $\bar{p}$ (da r^i stetig ist) und es gilt $\bar{x}^i \in B^i(p) \cap G$ für alle $p \in U$.

Falls $\bar{p}^t \bar{x}^i = r^i(\bar{p})$ gilt, so wählen wir $\tilde{x}^i$ gemäß (9.2) und setzen $x^i_\lambda := \lambda \tilde{x}^i + (1-\lambda)\bar{x}^i$.
Nun gilt $\bar{p}^t x^i_\lambda < r^i(\bar{p})$ für alle $\lambda \in (0,1]$. Da G offen ist gibt es ein $\lambda_0 > 0$ mit $x^i_{\lambda_0} \in G$, und wir können wie oben argumentieren.

iv) Da X^i kompakt ist, und nach *(ii)* der Graph $Gr\, B^i$ abgeschlossen ist, folgt nach 8.6 dass B^i ohs ist, zusammen mit *(iii)* also stetig.

v) Nach dem Satz von Debreu 5.17 existiert eine stetige Nutzenfunktion u^i für $\succeq^i$.
Setze $f^i(p,x) = u^i(x)$. Dann ist f^i eine stetige Funktion von $\mathbb{P}^n \times X^i$ nach $\mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} D^i(p) &= \{x^i \in B^i(p) : u^i(x^i) = \max_{z^i \in B^i(p)} u^i(z^i)\} \\ &= \{x^i \in B^i(p) : f^i(p,x^i) = \max_{z^i \in B^i(p)} f^i(p,z^i)\} \end{aligned}$$

Wir können den Satz von Berge 8.11 anwenden und erhalten, dass D^i ohs ist.

vi) Da $\succeq^i$ eine Präferenzordnung ist, gilt

$$D^i(p) = \operatorname{dom}(B^i(p), \succeq^i) = \underbrace{B^i(p)}_{\text{abg. nach } (i)} \cap \bigcap_{x^i \in X^i} \underbrace{\left\{z^i \in X^i : z^i \succeq^i x^i\right\}}_{\text{abgeschlossen n.V.}}$$

Somit ist $D^i(p)$ abgeschlossen.

vii), viii) analog zu *(i), (ii), (iv)*. □

9.6 Satz von Arrow-Debreu

9.6 Satz. *Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie. Für jedes $i \in M$ gelte:*

i) X^i ist konvex und kompakt.

ii) $\succeq^i$ ist eine abgeschlossene, schwach konvexe Präferenzordnung.

iii) Für alle $p \in \mathbb{P}^n$ gibt es ein $\tilde{x}^i \in X^i$ mit $p^t \tilde{x}^i < p^t a^i$.

iv) Für jedes $j \in K$ gelte: Y^j ist konvex und kompakt und $0 \in Y^j$.

Dann existiert ein Gleichgewicht.

Beweis. Wir ordnen $\mathcal{P}$ wie oben die abstrakte Ökonomie $\mathcal{A}$ zu und prüfen nach, dass $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arrow-Debreu-Nash 8.17 erfüllt.

i) S^l ist nicht leer, konvex und kompakt für alle l nach Voraussetzung (bzw. trivialerweise im Falle $l = m + k + 1$).

ii) Die Voraussetzung (9.2) des obigen Lemmas ist erfüllt wegen $0 \in Y^j$ und

$$p^t \tilde{x}^i < p^t a^i = p^t a^i + \sum_j \theta_{ij} 0 \leqq p^t a^i + \sum_j \theta_{ij} \underbrace{\sup_{y^j \in Y^j} p^t y^j}_{\rho^j(p)} = r^i(p)$$

Nach Satz 8.9 und Satz 8.10 sind die ρ^j stetig. Daraus ergibt sich die Stetigkeit von r^i.

Für $l \leqq m$ sowie $s = (x,y,p)$ ist $\Psi^l(s) = B^l(p)$; diese Menge ist konvex, abgeschlossen (daher auch kompakt) und nicht leer ((*i*) des vorigen Lemmas). B^l (und damit auch Ψ^l) ist stetig nach (*iv*) des vorigen Lemmas.

Für $l > m$ erfüllt Ψ^l trivialerweise Bedingung (*ii*).

iii) Nach dem Satz von Debreu 5.17 gibt es zu $\succeq^i$ eine stetige Nutzenfunktion u^i welche nach 5.9.b.i quasikonkav ist. Hieraus folgt, dass für alle l Voraussetzung (*iii*) erfüllt ist.

Wir können also auf die Existenz eines sozialen Gleichgewichts schließen. Dieses ist nach 9.4 ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$. □

Aber: Unter den obigen Voraussetzungen muss kein Walras-Gleichgewicht existieren.
Gegenbeispiel:

$$X^1 = Y^1 = \{0\} \subset \mathbb{R}, \qquad a^1 = 1, \qquad \mathbb{P}^1 = \{1\}$$

Hier ist $\succeq^i = X^1 \times X^1$ die einzige Präferenzordnung. Aber

$$p^t(x^1 - y^1 - a) = -1 \neq 0$$

9.7 Definition. Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie. Dann heißt ein $x^i \in X^i$ *realisierbar*, wenn es für jedes $l \neq i$ ein $x^l \in X^l$, und für alle $j \leqq k$ ein $y^j \in Y^j$ gibt, so dass

$$x^i + \sum_{l \neq i} x^l \leqq \sum_{j \in K} y^j + \sum_{l \in M} a^l$$

gilt. Sei weiter

$$\hat{X}^i := \{x^i \in X^i : x^i \text{ ist realisierbar}\}$$

9.8 Korollar. *Ist in der Situation von 9.6 jedes $\succeq^i$ konvex, und gibt es für alle $i \in M$ und alle $x^i \in \hat{X}^i$ ein $\hat{x}^i \in \hat{X}^i$ mit $\hat{x}^i \succ^i x^i$ („$\hat{X}^i$ enthält keinen Sättigungspunkt“), so ist jedes Gleichgewicht Walras'sch.*

Beweis. Sei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ ein Gleichgewicht.
Dann gilt $\bar{p}^t \bar{x}^i = r^i(\bar{p})$ $(*)$ für alle i, denn:

Für jedes i ist $\bar{x}^i \in \hat{X}^i$ und es gibt ein $\hat{x}^i \in \hat{X}^i$ mit $\hat{x}^i \succ^i \bar{x}^i$.

Angenommen, es gäbe ein i mit $\bar{p}^t \bar{x}^i < r^i(\bar{p})$. Sei $x^i_\lambda = \lambda \hat{x}^i + (1-\lambda)\bar{x}^i$. Dann gilt $x^i_\lambda \in X^i$ da X^i konvex ist. Nun gibt es ein $\lambda \in (0,1)$ mit $\bar{p}^t x^i_\lambda < r^i(\bar{p})$, also $x^i_\lambda \in B^i(\bar{p})$.

Da $\succeq^i$ konvex ist, folgt $x^i_\lambda \succ^i \bar{x}^i$. Wir haben den Widerspruch $\bar{x}^i \notin D^i(\bar{p})$ erreicht.

Mit $(*)$ können wir nun schließen:

$$\begin{aligned}\bar{p}^t \left(\sum_i \bar{x}^i\right) &= \sum_i r^i(\bar{p}) = \sum_j \sum_i \theta_{ij} \bar{p}^t \bar{y}^j + \bar{p}^t \left(\sum a^i\right) \\ &= \bar{p}^t \left(\sum \bar{y}^j + a\right)\end{aligned}$$

□

9.9 Lemma. *Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex, und gelte $Y \cap (-Y) = \{0\}$ sowie $Y \supset -\mathbb{R}^n_+$. Dann existiert zu jedem $b \in \mathbb{R}^n$ und jedem $\nu \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass aus $y^1, \ldots, y^\nu \in Y$ und $\sum_{i=1}^\nu y^i \geqq b$ folgt: $\|y^j\| \leqq N$ für alle $j \leqq \nu$.*

Beweis. Sei $K := \{y \in Y : \|y\| = 1\}$.

1. *Es gilt $0 \notin \operatorname{conv} K$.*[10] Angenommen, es gilt

$$0 = \alpha_1 y^1 + \cdots + \alpha_\nu y^\nu, \quad y^i \in K, \quad \alpha_i \neq 0, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) \in \mathbb{P}^\nu$$

Dann wäre

$$-\alpha_1 y^1 = \alpha_1 0 + \alpha_2 y^2 + \ldots \alpha_\nu y^\nu \in Y$$

(da Y konvex ist). Es gilt auch

$$\alpha_1 y^1 = \alpha_1 y^1 + (1-\alpha_1) 0 \in Y$$

Das heißt $\alpha_1 y^1 \in Y \cap (-Y)$, also $\alpha_1 = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

[10] Hier ist folgende etwas allgemeinere Definition von conv gemeint:

$$\operatorname{conv} K = \bigcap \{C \supset K : C \text{ konvex}\} = \left\{\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{P}^k, x_i \in K\right\}$$

Carathéodory zeigte, dass für $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\operatorname{conv} X = \left\{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i : (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{P}^{n+1}, x_i \in X\right\}$$

Hieraus folgt u.a. dass für K kompakt auch conv K kompakt ist.

2. *Es gibt ein $q = (q_1, \ldots, q_n)^t \in \mathbb{R}^n$ mit $q > 0$ und $q^t x < 0$ für alle $x \in K$.*
   Zunächst bemerken wir, dass K kompakt ist, und somit auch conv K (nach Carathéodory). Nach dem Trennungssatz 4.7 können wir auf die Existenz eines q mit $q^t x < 0$ für alle $x \in \operatorname{conv} K$ schließen.Da offenbar $-e^i \in K$ gilt, folgt $-q_i = q^t(-e^i) < 0$ für alle i.

3. *Zu obigem q gibt es $\varepsilon > 0$, $\beta > 0$, so dass $q^t y \leqq \beta + \varepsilon(1 - \|y\|)$ für alle $y \in Y$ gilt.*
   Wir definieren $\varepsilon := -\max\{q^t x : x \in K\} > 0$ und $\beta := \max\{q^t x : \|x\| \leqq 1\} > 0$.
   Falls $\|y\| \leqq 1$ ist, so gilt: $q^t y \leqq \beta \leqq \beta + \varepsilon(1 - \|y\|)$.
   Falls $\|y\| > 1$ ist, so ist $\frac{y}{\|y\|}$ in K, und es gilt

$$-\varepsilon \geqq \frac{q^t y}{\|y\|}, \quad \text{also} \quad q^t y \leqq -\varepsilon \|y\| \leqq \beta + \varepsilon(1 - \|y\|)$$

4. Sei nun $y^j \in Y$ mit $y^1 + \cdots + y^\nu \geqq b$. Also

$$q^t b \leqq \sum_{j=1}^\nu q^t y^j \leqq \nu(\beta + \varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^\nu \|y^j\|$$

   Nun folgt

$$\|y^j\| \leqq \sum_{j=1}^\nu \|y^j\| \leqq \nu \left(\frac{\beta}{\varepsilon} + 1\right) - \frac{q^t b}{\varepsilon}$$

   Da die rechte Seite von der Wahl der y^j unabhängig ist, beendet dies den Beweis. □

9.10 Satz von Arrow-Debreu-Uzawa

9.10 Satz. *Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie. Für jedes $i \in M$ gelte:*

i) X^i ist konvex, abgeschlossen und nach unten beschränkt (d.h. es gibt ein $b^i \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x^i \in X^i$ gilt: $x^i \geqq b^i$; diese werden im Beweis verwendet).

ii) $\succeq^i$ ist eine abgeschlossene, konvexe Präferenzordnung.

iii) $\hat{X}^i$ enthält keinen Sättigungspunkt.

iv) Es gibt ein $\tilde{x}^i \in X^i$ mit $\tilde{x}^i < a^i$.

v) Für jedes $j \in K$ gelte $0 \in Y^j$.

vi) Für $Y_S := Y^1 \oplus \cdots \oplus Y^k$ gilt $Y_S \cap (-Y_S) = \{0\}$ und $Y_S \supset -\mathbb{R}^n_+$. Ferner sei Y_S abgeschlossen und konvex.

Dann existiert ein Gleichgewicht $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ mit

$$\sum_{i \in M} \bar{x}^i = \sum_{j \in K} \bar{y}^j + \sum_{i \in M} a^i$$

insbesondere ist das Gleichgewicht Walras'sch.

Die Bedingung $Y_S \cap (-Y_S) = \{0\}$ heißt „Irreversibilitätsbedingung“; es gibt kein Perpetuum Mobile. $Y_S \supset -\mathbb{R}^n_+$ bedeutet: alle Güter sind als Input frei verfügbar, es gibt keine Kapazitätsbeschränkung.

Beweis. 1. Es gilt unter unseren Voraussetzungen (Beweis: Übung):

$$\begin{aligned}(\operatorname{conv} Y^1) \oplus \cdots \oplus (\operatorname{conv} Y^k) &= \operatorname{conv}(Y^1 \oplus \cdots \oplus Y^k) = Y_S \\ \bar{Y}^1 \oplus \cdots \oplus \bar{Y}^k &= \overline{Y^1 \oplus \cdots \oplus Y^k} = Y_S \\ \operatorname{conv} \bar{Y}^1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{conv} \bar{Y}^k &= Y_S \end{aligned} \tag{9.3}$$

2. Sei $\bar{\mathcal{P}}$ die P-Ökonomie, die man erhält, wenn man in $\mathcal{P}$ die Mengen Y^j durch conv $\bar{Y}^j$ ersetzt. Sei weiter

$$\bar{A} := \left\{ (x, y) \in \prod_{i \in M} X^i \times \prod_{j \in K} \operatorname{conv} \bar{Y}^j : \sum_{i \in M} x^i \leqq \sum_{j \in K} y^j + a \right\}$$

die Menge der möglichen Aktionen in $\bar{\mathcal{P}}$. Wegen (9.3) stimmen in $\mathcal{P}$ und $\bar{\mathcal{P}}$ die Mengen $\hat{X}^i$ der realisierbaren $x^i \in X^i$ überein, und es gilt

$$(x, y) \in \bar{A} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in K} y^j \geqq \sum_{i \in M} x^i - a \geqq \sum_{i \in M} b^i - a$$

Nun wenden wir Lemma 9.9 auf Y_S an und schließen auf die Existenz eines N, so dass $\|y^j\| \leqq N$ für alle $j \in K$ gilt. Für festes i rechnen wir

$$b^i \leqq x^i \leqq \sum y^j - \sum_{l \neq i} x^l + a \leqq kN \cdot e - \sum_{l \neq i} b^l + a$$

Somit gibt es ein ν, so dass gilt:

$$(x, y) \in \bar{A} \quad \Rightarrow \quad \left\|x^i\right\| < \nu, \ \left\|y^j\right\| < \nu, \ \left\|\tilde{x}^i\right\| < \nu \ \text{(vgl. Voraussetzung } (iv))$$

3. Für $B := \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \leqq \nu\}$ betrachten wir nun die P-Ökonomie

$$\begin{aligned} \breve{\mathcal{P}} &:= \left(\left(\breve{X}^i, \succeq^i, a^i \right), \theta_{ij}, \breve{Y}^j \right)_{i \in M}^{j \in K} \\ \text{mit } \breve{X}^i &:= X^i \cap B; \qquad \text{insbesondere gilt } \tilde{x}^i \in \breve{X}^i \\ \text{und } \breve{Y}^j &:= \operatorname{conv} \bar{Y}^j \cap B \end{aligned}$$

Hier bezeichnen wir die Einschränkung von $\succeq^i$ auf $\breve{X}^i$ wieder mit $\succeq^i$. Diese Einschränkung ist wieder konvex und abgeschlossen, folglich auch schwach konvex nach Satz 3.9. Nun erfüllt $\breve{\mathcal{P}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arrow-Debreu 9.6, d.h. es existiert ein Gleichgewicht $(\breve{x}, \breve{y}, \breve{p})$ in $\breve{\mathcal{P}}$.

Wegen $\bar{A} = \breve{A}$ (die möglichen Aktionen in $\bar{\mathcal{P}}$ und $\breve{\mathcal{P}}$ sind dieselben) ist die Menge der realisierbaren $x^i \in X^i$ in $\breve{\mathcal{P}}$ ebenfalls in $\hat{X}^i$. Nach Korollar 9.8 ist das Gleichgewicht Walras'sch.

4. Sei $z = \sum_{i \in M} \breve{x}^i - \sum_{j \in K} \breve{y}^j - a$ der Nachfrageüberschuss bei obigem Gleichgewicht. Per definitionem ist $z \leqq 0$ und $\breve{p}^t z = 0$, da das Gleichgewicht Walras'sch ist. Wegen $\breve{y}^j \in \breve{Y}^j \subset \operatorname{conv} \bar{Y}^j$ und (9.3) gilt $y := \sum_{j \in K} \breve{y}^k \in Y_S$.

Für $0 < \lambda \leqq 1$ ist $\frac{z}{\lambda} \in -\mathbb{R}^n_+ \subset Y_S$. Da Y_S konvex ist, erhalten wir

$$(1 - \lambda) y + \underbrace{\lambda \frac{z}{\lambda}}_{z} \in Y_S$$

mit der Abgeschlossenheit von Y_S können wir $y + z \in Y_S$ folgern. Das heißt: Es gibt $\bar{y}^j \in Y^j$, so dass $\sum_{j \in K} \bar{y}^j = y + z$ (aufgrund der Gestalt von Y_S).

Dann ist

$$\sum_{i \in M} \breve{x}^i = z + y + a = \sum_{j \in K} \bar{y}^j + a \tag{9.4}$$

5. Wir prüfen jetzt, dass $(\breve{x}, \bar{y}, \breve{p})$ ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$ ist.

Nach (9.4) ist Bedingung (iii) erfüllt.

Bedingung (ii): Wir haben oben gesehen, dass $\breve{p}^t z = 0$ gilt. Es folgt

$$\breve{p}^t \left(\sum_j \bar{y}^j \right) = \breve{p}^t z + \breve{p}^t y = \breve{p}^t \left(\sum \breve{y}^j \right) \tag{9.5}$$

$(\breve{x}, \breve{y}, \breve{p})$ ist ein Gleichgewicht in $\breve{\mathcal{P}}$, also gilt

$$\breve{p}^t \breve{y}^j \geqq \breve{p}^t z^j \text{ für alle } z^j \in \breve{Y}^j \tag{9.6}$$

Wir haben auch $(\breve{x}, \bar{y}) \in \bar{A}$ (nach Definition und (9.4)), also $\bar{y}^j \in \breve{Y}^j$. Mit (9.6) folgt

$$\breve{p}^t \breve{y}^j \geqq \breve{p}^t \bar{y}^j \quad \underset{(9.5)}{\Rightarrow} \quad \breve{p}^t \breve{y}^j = \breve{p}^t \bar{y}^j \tag{9.7}$$

Wir müssen noch zeigen, dass $\breve{p}^t \bar{y}^j = \max_{z^j \in Y^j} \breve{p}^t z^j$ gilt. Angenommen, es gäbe ein

$$\tilde{z}^j \in Y^j \text{ mit } \breve{p}^t \tilde{z}^j > \breve{p}^t \bar{y}^j$$

Dann würde dies auf dem ganzen „Intervall“ $[\tilde{z}^j, \bar{y}^j)$ gelten, woraus sofort ein Widerspruch folgt, weil dieses Intervall nach $\breve{Y}^j$ hineinragt (man beachte, dass $\|\bar{y}^j\| < \nu$ gilt).

Bedingung (i): Wir müssen zeigen, dass $\breve{x}$ in $\mathcal{P}$ allseits erwünscht ist unter $\breve{p}$. Da $(\breve{x}, \breve{y}, \breve{p})$ ein Gleichgewicht in $\breve{\mathcal{P}}$ ist, ist $\breve{x}^i$ $\succeq^i$-maximal in

$$\breve{B}^i(\breve{p}) := \{x^i \in \breve{X}^i : \breve{p}^t x^i \leqq \breve{p}^t a + \sum_j \theta_{ij} \underbrace{\breve{p}^t \breve{y}^j}_{= \breve{p}^t \bar{y}^j}\}$$

Ähnlich wie oben können wir (mit der Konvexität von $\succeq^i$) aus der Annahme, $\breve{x}^i$ sei nicht in $D^i(\breve{p})$ einen Widerspruch herleiten. □

9.11 Ein zweiter Zugang

9.11 Definition. Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie mit den Nachfragekorrespondenzen D^i, und den Gewinnkorrespondenzen G^j. Dann heißt[11]

$$\begin{aligned} Z &: \mathbb{P}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \\ Z(p) &= \bigoplus_{i\in M} D^i(p) - \bigoplus_{j\in K} G^j(p) - \sum_i a^i \end{aligned}$$

die *Nachfrageüberschusskorrespondenz.*

9.12 Satz von Gale-Nikaido-Debreu

9.12 Satz. *In der Situation von 9.11 gelte*

i) $p^t z \leqq 0$ *für alle* $p \in \mathbb{P}^n$ *und alle* $z \in Z(p)$. *(„$\mathcal{P}$ ist global solide“)*

ii) $Z(p)$ *ist nicht leer, konvex und kompakt für alle* $p \in \mathbb{P}^n$.

iii) Z *ist nach oben halbstetig.*

Dann besitzt $\mathcal{P}$ *ein Gleichgewicht.*

Beweis. $\Phi = Z$ erfüllt die Voraussetzungen von Aufgabe 36. Also gibt es ein $\bar{p} \in \mathbb{P}^n$ und ein $\bar{z} \in Z(\bar{p})$ mit $p^t \bar{z} \leqq 0$ für alle $p \in \mathbb{P}^n$. Somit gilt $\bar{z} \leqq 0$.

Wegen $\bar{z} \in Z(\bar{p})$ wissen wir, dass man $\bar{z}$ als $\sum_{i\in M} \bar{x}^i - \sum_{j\in K} \bar{y}^j - \sum_{i\in M} a^i$ schreiben kann.

Aus der Definition der Nachfrageüberschusskorrespondenz können wir unmittelbar ablesen, dass $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$ ist. □

Man kann mit dem obigen Satz, Lemma 9.5 sowie dem folgenden Lemma einen zweiten Beweis zum Satz von Arrow-Debreu finden.

9.13 Lemma. *Sei* X *ein topologischer Raum und* Φ^i *Korrespondenzen von* X *nach* $\mathbb{R}^k$ *(für* $i \leqq k$*). Sind alle* Φ^i *ohs und alle* $\Phi^i(x)$ *konvex und kompakt, so gilt dies auch für die „Summenkorrespondenz“*

$$\Phi(x) := \Phi^1(x) \oplus \cdots \oplus \Phi^k(x)$$

Beweis. Übung oder ([**HK**, S. 19]). □

Literatur zu Kapitel 9: [**AH**], [**Au**], [**De**], [**Hi**], [**HK**], [**Ich**], [**KN**], [**Ni 1**], [**Ro 1**], [**Ro 2**], [**Va**].

[11] Die Differenz in der Gleichung ist eine „echte“, d.h. Vektorraum-Differenz, keine Mengendifferenz. Vgl. auch Fußnote 2 auf Seite 5.