Skript zur Vorlesung „Mathematische Wirtschaftstheorie“ von Prof. Kindler

Andreas Balser[1]

9. April 2003

[1]balser@mathematik.tu-darmstadt.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript entstand im Laufe des WS 01/02 parallel zur Vorlesung. Sicherlich sind (imer noch) einige Tippfehler enthalten. Wer welche findet möge sie mir (unter der auf dem Deckblatt angegebenen Email-Adresse) zuschicken, damit ich sie in der nächsten Ausgabe verbessern kann.

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Clemens Krauß, Petrissa Gath, Raphael Overbeck sowie Herr Professor Kindler für das Auffinden diverser Tippfehler.

Im Moment enthält nur Kapitel 4 Skizzen. Es würde mich freuen, wenn jemand Skizzen zu den anderen Kapiteln erstellen würde. Falls sie mir als .eps-Datei (encapsulated Postscript – wird von fast allen Zeichenprogrammen unterstützt) zugeschickt werden, binde ich sie natürlich sofort ein.

Verständlicherweise kann ich nicht für die Exaktheit der Mitschrift garantieren...

Die meisten Fußnoten sind Anmerkungen von mir, die nicht zur eigentlichen Mitschrift gehören. Da sie nicht vom Professor stammen, sind sie mit der nötigen Vorsicht zu geniessen.

Im Zuge meiner Prüfungsvorbereitung habe ich einige Beweise etwas umgestellt (d.h. „m.E. vereinfacht oder eleganter formuliert“). Da viele dieser Änderungen Kleinigkeiten sind, habe ich nicht alle mit Herr Kindler durchgesprochen. Um auf die Veränderungen aufmerksam zu machen sind entsprechende Stellen mit $\circledast$ markiert.

Viel Spass beim Arbeiten mit dem Skript!

Andreas Balser

0 Einführung

0.0 Notation

In der Vorlesung wurde dieser Teil am Ende von Kapitel 0 vorgestellt.

Für reelle $m \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ setzen wir

$$\begin{aligned} A &\geqq B \Leftrightarrow a_{ij} \geqq b_{ij} \quad (\forall i, j) \\ A &\geqq 0 \;\;\Leftrightarrow \text{„}A \text{ ist nichtnegativ“} \\ A &\geq B \Leftrightarrow A \geqq B \wedge A \neq B \\ A &\geq 0 \;\;\Leftrightarrow \text{„}A \text{ ist semipositiv“} \\ A &> B \Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij} \quad (\forall i, j) \\ A &> 0 \;\;\Leftrightarrow \text{„}A \text{ ist positiv“} \end{aligned}$$

Natürlich verwenden wir die gleiche Schreibweise für Vektoren.

(Anmerkung des Autors:) Für Zahlen haben nach obigen Definitionen $\geq$ und $>$ die gleiche Bedeutung. Daher muss $\geqq$ verwendet werden; es kann sein, dass an manchen Stellen ein $\geq$ steht; wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, dass es sich um Zahlen handelt, möge $\geq$ die übliche Bedeutung haben.

Wir definieren $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqq 0\}$.

$e^i \in \mathbb{R}^n$ bezeichne den i-ten Einheitsvektor, und $e := \sum e^i = (1, \dots, 1)^t$.

Wenn nicht anders vermerkt versehen wir $\mathbb{R}^n$ im Folgenden mit der Summennorm:

$$\|x\| = \|x\|_1 := \sum |x_i| \qquad (x = (x_1, \dots, x_n)^t)$$

Dann ist $\mathbb{P}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \wedge e^t x = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \wedge \|x\|_1 = 1\}$ der Einheitssimplex.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| := (|x_1|, \dots, |x_n|)^t$.

Schließlich sei $I = (e^1, \dots, e^n)$ die Einheitsmatrix, und $E := (e, \dots, e)$

Des weiteren verwenden wir die Notation $I + J$ bzw. $\sum_{j \in J} I_j$ für die disjunkte Vereinigung von Mengen[1]. Die Notation $I - J$ wird gelegentlich für die Mengendifferenz verwendet[2].

Für Teilmengen eines Vektorraumes (bzw. einer Gruppe) verwendet Herr Kindler auch gelegentlich eine Notation wie[3]

$$\sum_{i \in I} X^i - \sum_{j \in J} Y^j := \left\{ \sum_{i \in I} x^i - \sum_{j \in J} y^j : x^i \in X^i, y^j \in Y^j \right\}$$

[1] Persönlich gefällt mir diese Notation nicht und ich werde versuchen, sie in dieser Version des Skripts zu umgehen, wo möglich.

[2] Ich verwende dafür $I \backslash J$.

[3] Ich werde anstelle der grossen Summenzeichen das Zeichen $\bigoplus$ verwenden, es erscheint mir ein wenig passender, und hoffentlich auch weniger missverständlich, insbesondere in Bezug auf die andere mögliche Bedeutung von „+“ für Mengen. Hierbei ist dann darauf zu achten, dass man im Kontext erkennt, dass bei der Summe keine zusätzlichen Skalare zugelassen sind.

0.1 Beispiel (Schweinezyklus)

$y(k)$: Schweinepreis in Periode $k \in \mathbb{N}_0$.

Das Angebot

$$A(k) = a + by(k-1), \quad k \in \mathbb{N},\ b > 0$$

richtet sich nach dem vorherigen Schweinepreis.

Hier ist eine Periode ungefähr 4 Monate Trachtzeit 1 Jahr Mastzeit + zeitliche Verzögerung, also ca. 1,5 Jahre.

Die Nachfrage

$$N(k) = c + dy(k), \quad k \in \mathbb{N}_0,\ d < 0$$

richtet sich nach dem momentanen Schweinepreis.

Die (typische) Tatsache, dass der Produzent auf die Nachfrage nur mit zeitlicher Verzögerung reagieren kann, nennt man *Time-lag.*

Der Preis werde nun so festgesetzt, dass alle Schweine verkauft werden können; es herrsche also *Marktgleichgewicht*

$$A(k) = N(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

Hieraus ergibt sich folgende *Differenzengleichung*

$$y(k+1) - \frac{b}{d} y(k) = \frac{a-c}{d}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{0.1}$$

Der Preis ändert sich nicht, wenn er stationäre Lösung ist, d.h. $y(k) = \bar{y}$ mit Preisgleichgewicht

$$\begin{aligned} \bar{y} - \frac{b}{d}\bar{y} &= \frac{a-c}{d} \\ \bar{y} &= \frac{a-c}{b-d} \end{aligned}$$

In diesem Fall sind auch Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht:

$$A(k) = N(k) = a + b\bar{y} = c + d\bar{y}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Der allgemeine Fall

Setze $z(k) = y(k) - \bar{y}$. Mit (0.1) folgt dann

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \frac{b}{d} z(k) \\ z(k) &= \left(\frac{b}{d}\right)^k z(0) = \left(\frac{b}{d}\right)^k (y(0) - \bar{y}) \end{aligned}$$

und somit

$$y(k) = \left(\frac{b}{d}\right)^k (y(0) - \bar{y}) + \bar{y}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Im Falle $y(0) = \bar{y}$ tritt die Gleichgewichtslösung auf. Andernfalls oszilliert $y(k)$ wegen $\frac{b}{d} < 0$ um das Gleichgewicht $\bar{y}$. Die Schwingung ist gedämpft falls $|b| < |d|$ ist.

Dann gilt $y(k) \to \bar{y}$, d.h. im Laufe der Zeit nähert man sich dem Gleichgewichtspreis.

Im Falle $|b| = |d|$ pendelt der Preis zwischen $y(0)$ und $2\bar{y} - y(0)$.

Im Falle $|b| > |d|$ ist das Modell instabil.

Hier fehlen ein paar Skizzen.

0.2 Beispiel (einsame Insel)

Auf einer einsamen Insel leben eine Bauern-, eine Zimmermanns- und eine Weberfamilie glücklich und zufrieden, indem sie ihre Arbeitsprodukte einträchtig untereinander aufteilen. Der Konsum der Produkte erfolgt nach dem Muster

	B	Z	W
B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
W	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

Die Lebensmittel werden also gleichmäßig aufgeteilt (1. Zeile), der Zimmermann stellt je ein Viertel seiner Arbeitskraft den beiden anderen zur Verfügung, ...

Eines Tages beschließen sie, „wie in einem zivilisierten Land", Geld einzuführen.

Die Preise der drei Güter sollen dabei so gestalten werden, dass dennoch „alles beim Alten" bleibt.

Güterflussgraph, Preisgraph

Damit jeder zufrieden ist, müssen die Preise so festgesetzt werden, dass für jeden der Wert der abgegebenen Güter gleich dem Wert der erhaltenen Güter ist, d.h.:

$$B : \left(\frac{p_b}{3} +\right) \frac{p_b}{3} + \frac{p_b}{3} = \left(\frac{p_b}{3} +\right) \frac{p_z}{4} + \frac{p_w}{2}$$

usw., d.h. folgendes *Preisgleichgewicht* soll gelten (wobei A die Matrix von oben ist):

$$p = (p_b, p_z, p_w)^t = A^t p$$
$$p^t A = p^t$$

Schluss Die obigen Beispiele beleuchten ein Hauptproblem der mathematischen Wirtschaftstheorie:

Problem: Wann existiert, und wie findet man für eine Ökonomie ein geeignetes Preissystem unter dem (ein näher zu präzisierendes) Gleichgewicht herrscht?

1 Das lineare Input-Output-Modell von Leontieff

Es werden n Produktionsprozesse (Aktivitäten, etc.) betrachtet, in denen je ein Gut aus n Gütern erzeugt wird.

Makroökonomische Interpretation:

$$\text{Aktivitäten} \cong \text{Wirtschaftssektoren}$$

In jedem Sektor wird genau ein bestimmtes Gut (bzw. ein Güterbündel) erzeugt, das sich von allen anderen unterscheidet.

Modellannahme: Für jede Einheit eines Gutes j, dem Output des Sektors j, ist jeweils die Menge $a_{ij} \geqq 0$, des Gutes i als Input erforderlich.

Input sind Produktionsfaktoren und Ressourcen, Rohstoffe oder Zwischenprodukte, die als Output aus einem anderen Sektor stammen.

Es gibt keine Substitution zwischen den einzelnen Inputs.

Die Matrix $A = (a_{ij}) \geqq 0$ heißt *Input-Matrix* (oder *Technologie-Matrix*), die a_{ij} heißen *Input-Koeffizienten*. Dieses Modell wird auch *Leontieff-Modell* genannt (insbesondere dann, wenn es die gesamte Volkswirtschaft umfasst).

1.1 Das geschlossene Input-Output-Modell

In einem geschlossenen Modell werden alle Outputs zugleich als Inputs verwendet. Damit das System überhaupt arbeiten kann, muss der Output x_i des i-ten Gutes mindestens gleich dem Input $\sum_j a_{ij}x_j$ des Gutes i sein.

Für den Output x_j wird die Menge $a_{ij}x_j$ von Gut i benötigt, also wird die Menge $\sum_j a_{ij}x_j$ von Gut i für den Output x benötigt.

Das heißt: Für den Output x wird der Input Ax benötigt.

Es muss also ein $x \geq 0$ existieren mit $Ax \leqq x$ (*Funktionsfähigkeit*).

Solch ein x nennen wir *zulässig*.

Gilt für ein $x \geq 0$ sogar $Ax = x$, so nennen wir x einen *Gleichgewichtsoutput*.

Jedem Gut i kann ein Preis $p_i \geqq 0$ zugeordnet werden. Der Preis bestimme sich linear, d.h. die λ-fache Gütermenge hat den λ-fachen Preis. $p = (p_1, \dots, p_n)^t$ sei der (semipositive) Preisvektor. Dann sind $p_i a_{ij}$ die Kosten des Inputs i für eine Einheit des Outputs j, d.h. $(p^tA)_j = \sum_i p_i a_{ij}$ sind die Gesamtkosten für eine Einheit des Outputs j, deren Wert p_j beträgt.

Genau dann stimmen in jedem Sektor der Erlös und die Kosten überein, wenn $p^tA = p^t$ gilt; dann heißt p *Gleichgewichtspreis*.

Gilt wenigstens $p^tA \geqq p^t$, so herrscht *Profitlosigkeit*. In diesem Fall heisst p *zulässig*.

Ist $e = (1, \dots, 1)^t$ ein Gleichgewichtsoutput bzw. Gleichgewichtspreis, so heißt A *zeilenstochastisch* bzw. *spaltenstochstisch*. Ist A sowohl zeilen- als auch spaltenstochastisch, so heißt A *doppeltstochastisch*.

1.1 Satz. *Sei $A \geq 0$ eine $(n \times n)$-Matrix.*

a) (i) *Existiert ein zulässiger positiver Preisvektor p, so gilt:*

$$Ax \leqq x \quad \Rightarrow \quad Ax = x \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

d.h. jeder zulässige Output ist bereits ein Gleichgewichtsoutput.

(ii) *Existiert ein positiver Gleichgewichtspreis, so existiert auch ein (semipositiver) Gleichgewichtsoutput.*

b) (i) *Existiert ein zulässiger Output $x > 0$, so gilt:*

$$p^tA \geqq p^t \quad \Rightarrow \quad p^tA = p^t \qquad (\forall p \in \mathbb{R}^n)$$

d.h. jeder zulässige Preis ist bereits ein Gleichgewichtspreis.

(ii) *Existiert ein positiver Gleichgewichtsoutput, so existiert auch ein Gleichgewichtspreis.*

Beweis. a) (i): Für $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ mit $Ax \leqq x$ sei $(Ax)_{i_0} < x_{i_0}$. Dann ergibt sich der folgende Widerspruch:

$$p^tx = \sum_i \underbrace{p_i}_{>0} \underbrace{x_i}_{\geqq (Ax)_i} > \sum_i p_i (Ax)_i = \underbrace{p^tA}_{\geqq p^t} x$$

(ii): Es sei p ein positiver Gleichgewichtspreis. Dann ist $Q := \{x \geqq 0 : p^tx = 1\}$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Wegen $1 = p^tx = \sum_i p_i x_i \geqq p_j x_j$ gilt $0 \leqq x_j \leqq \frac{1}{p_j}$; d.h. Q ist beschränkt, also kompakt. Für $T(x) := Ax$ gilt für $x \in Q$:

$$p^tT(x) = p^tAx = p^tx = 1.$$

Somit ist $T(Q) \subset Q$. Die Behauptung ergibt sich nun aus dem folgenden Spezialfall des Fixpunktsatzes von Markoff-Kakutani (bzw. von Brouwer 8.15).

b) analog zu a) □

1.2 Satz. *Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, so hat jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(Q) \subset Q$ einen Fixpunkt in Q.*

Beweis. Übung 4. □

1.3 Bemerkung. Das obige Modell kann auch zur Beschreibung des Außenhandels zwischen n Ländern dienen:

1. Interpretation:
$a_{ij} \cong$ Anteil der von Land i produzierten Güter, die an Land j abgegeben werden.
Hier: $\sum_j a_{ij} = 1$, d.h. A ist zeilenstochastisch.

2. Interpretation:
$a_{ij} \cong$ Anteil des Einkommens von Land j, das für Güter aus Land i ausgegeben wird.
Hier: $\sum_i a_{ij} = 1$, d.h. A ist spaltenstochastisch.

1.2 Etwas „Perron-Frobenius-Theorie“

Eine $(n \times n)$-Matrix D heißt *nichtnegativ invertierbar*, wenn die Inverse D^{-1} existiert und nichtnegativ ist.

1.4 Lemma. *Für jede $(n \times n)$-Matrix $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} \leqq 0$ für alle $i \neq j$ sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) Es gibt ein $x \geqq 0$ mit $Dx > 0$.

(ii) Aus $Dx \geqq 0$ folgt $x \geqq 0$.

(iii) Für jedes $y \geqq 0$ existiert ein $x \geqq 0$ mit $Dx = y$.

(iv) D ist nichtnegativ invertierbar.

(v) D ist invertierbar, und aus $x^t D > 0$ folgt $x > 0$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Da $x \mapsto Dx$ stetig ist, gibt es auch ein $x > 0$ mit $Dx > 0$.
Es sei nun $Dy \geqq 0$ für ein $y \in \mathbb{R}^n$. Setze $\theta := \min_j \frac{y_j}{x_j}$ und wähle ein i_0 mit $\theta x_{i_0} = y_{i_0}$. Dann gilt:

$$0 \leqq (Dy)_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} \underbrace{y_j}_{\geqq \theta x_j} \underbrace{d_{i_0 j}}_{\leqq 0} + \underbrace{y_{i_0}}_{= \theta x_{i_0}} d_{i_0 i_0} \leqq \theta \sum_{j \neq i_0} x_j d_{i_0 j} + \theta x_{i_0} d_{i_0 i_0} = \theta (Dx)_{i_0}$$

Also $\theta \geqq 0$, was insbesondere $y \geqq 0$ zur Folge hat.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Aus $Dx = 0$ folgt $D(\pm x) \geqq 0$, also $\pm x \geqq 0$, d.h. $x = 0$. Somt ist $\operatorname{rang}(D) = n$, und D^{-1} existiert. Für $y \geqq 0$ wähle man $x = D^{-1} y$. Dann gilt $Dx = y \geqq 0$, und nach (ii) $x \geqq 0$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Zu e^i existiert ein $x^i \geqq 0$ mit $Dx^i = e^i$.
Also ist $D^{-1} = (x^1, \ldots, x^n) \geqq 0$.
$(iv) \Rightarrow (i)$: ($\circledast$) Zu $e > 0$ wähle $x := D^{-1} e$. Da D nichtnegativ invertierbar ist, gilt $x > 0$.
$(iv) \Rightarrow (v)$: ($\circledast$) Sei $x^t D > 0$. Es folgt $x^t = x^t D D^{-1} > 0 D^{-1} = 0$.
$(v) \Rightarrow (iv)$: ($\circledast$) Setze $y^i = (D^{-1})^t e^i = (D^t)^{-1} e^i$. Es gilt

$$y^i_\varepsilon := (D^t)^{-1}(e^i + \varepsilon e) > 0$$

da $e^i + \varepsilon e$ für kleine positive ε positiv ist. Mit der Stetigkeit von $(D^t)^{-1}$ können wir $y^i \geqq 0$ schließen. Wir haben gezeigt, dass D^t nichtnegativ invertierbar ist. Folglich gilt dies auch für D. □

Bemerkung: Matrizen D mit $d_{ij} \leqq 0$ für $i \neq j$, welche die äquivalenten Bedingungen aus Lemma 1.4 erfüllen, werden auch *M-Matrizen* genannt (M steht für Metzler, Minkowski, Markoff).

Notwendig, aber nicht hinreichend für die Bedingungen aus 1.4 ist $d_{ii} > 0$ für alle i:

Denn aus $d_{ii} \leqq 0$ würde folgen:

$$(De^i)_j = d_{ji} \leqq 0 \text{ für alle } j$$

Und nach (ii) müsste $e^i \leqq 0$ gelten.

Im folgenden sei A eine nichtnegative $(n \times n)$-Matrix. Wir setzen

$$M(A) := \{\rho \in \mathbb{R} : \rho I - A \text{ ist nichtnegativ invertierbar}\}$$

1.5 Lemma ($\circledast$)**.** *Es gilt $M(A) = (\lambda, \infty)$ für ein nichtnegatives λ.*

Beweis. 1) Wähle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $\rho e > Ae$. Dann ist $De := (\rho I - A)e > 0$.
Mit 1.4 ist D nichtnegativ invertierbar, also ist $M(A) \neq \emptyset$.

2) Für $\rho \in M(A)$ gibt es (nach 1.4.i) ein $\tilde{x} \geqq 0$ mit $\rho \tilde{x} > A\tilde{x} \geqq 0$, daher ist ρ positiv. Die Menge $\{\rho' : \rho' \tilde{x} > A\tilde{x}\}$ ist offen, nach oben unbeschränkt und nach 1.4.i in $M(A)$ enthalten. Da ρ beliebig in $M(A)$ war, ist $M(A)$ offen, nach oben unbeschränkt und in $\mathbb{R}_+$ enthalten. Also ist $M(A) = (\lambda, \infty)$ für ein $\lambda \geqq 0$. □

Das eben ermittelte $\lambda = \lambda(A)$ heißt *Frobenius-Wurzel* von A.

1.6 Lemma ($\circledast$)**.** *Es gibt ein $x \in \mathbb{P}^n$ mit $Ax = \lambda(A)x$ $(= \lambda x)$.*

Beweis. Setze $y^k := ((\lambda + \frac{1}{k})I - A)^{-1} e \geq 0$, sowie $\sigma^k := \left\|y^k\right\|_1$ und $x^k := \frac{1}{\sigma^k} y^k \in \mathbb{P}^n$.
Da $\mathbb{P}^n$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge x^{k_l}, die gegen ein $x \in \mathbb{P}^n$ konvergiert. Es gilt

$$\left(\left(\lambda + \frac{1}{k_l}\right)I - A\right) x^{k_l} = \frac{e}{\sigma^{k_l}}$$

und

$$\left(\left(\lambda + \frac{1}{k_l}\right)I - A\right) x^{k_l} \to (\lambda I - A)x = \sigma e$$

mit $\frac{1}{\sigma^{k_l}} \to \sigma$, also insbesondere $\sigma \geqq 0$. Aus $\sigma > 0$ würde $\lambda \in M(A)$ folgen (nach 1.4.i), also gilt $\sigma = 0$ und x ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. □

1.7 Satz. *Ist A eine nichtnegative $(n \times n)$-Matrix, so gelten folgende Aussagen:*

(i) A hat einen nichtnegativen (reellen) Eigenwert. Der größte nichtnegative Eigenwert λ besitzt einen semipositiven Eigenvektor.

(ii) $(\rho I - A)$ ist nichtnegativ invertierbar genau dann wenn $\rho > \lambda$.

(iii) Aus $Ay \geqq \mu y$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $y \geq 0$ folgt $\mu \leqq \lambda$.

(iv) Es gilt $\lambda \geqq |\omega|$ für jeden Eigenwert ω von A.

Beweis. $(i), (ii)$: $\lambda = \lambda(A)$ ist nichtnegativer Eigenwert mit einem semipositiven Eigenvektor x (nach den beiden vorhergegangenen Sätzen). Für $\rho > \lambda$ ist $\rho I - A$ (nichtnegativ) invertierbar, also ist ρ kein Eigenwert und λ ist der größte reelle Eigenwert. Nun folgt (ii) aus Lemma 1.5.
(iii): Nehmen wir an, dass $\mu > \lambda$ gelte. In diesem Falle wissen wir, dass $(\mu I - A)^{-1}$ existiert und nichtnegativ ist. Zusammen mit $0 \geqq (\mu I - A)y$ müsste gelten:

$$0 \geqq (\mu I - A)^{-1}(\mu I - A)y = y \geq 0$$

(iv): Sei z ein Eigenvektor zu dem Eigenwert ω. Dann ist $Az = \omega z$, d.h. $\sum_j a_{ij} z_j = \omega z_i$. Somit gilt

$$|\omega| \cdot |z_i| \leqq \sum_j a_{ij} |z_j| \quad \text{und somit} \quad A|z| \geqq |\omega| \cdot |z|$$

was mit (iii) zeigt, dass $|\omega| \leqq \lambda$ gilt. □

Definition: Eine $(n \times n)$-Matrix heißt *reduzibel*,
wenn eine Teilmenge J von $\{1, \ldots, n\}$ existiert mit $\emptyset \neq J \neq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass $a_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $i \notin J,\ j \in J$ gilt.
Andernfalls heißt A *irreduzibel.*

Interpretation: Ist die Inputmatrix $A \geq 0$ reduzibel bzgl. J, so benutzt kein Sektor $P_j,\ j \in J$ ein Gut $i \notin J$: bezüglich der benötigten Inputs ist die Teilmenge der Sektoren $\{P_j : j \in J\}$ autark.

1.8 Bemerkung. a) Ist A reduzibel bzgl. J, so gibt es eine Permutationsmatrix P mit

$$P^tAP = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\ |J| \\ \}\ n - |J| \end{array}$$
$$\qquad |J| \quad n - |J|$$

b) A ist genau dann reduzibel, wenn A^t reduzibel ist (bzgl. $J(A^t) = (J(A))^C$).

c) Falls $A > 0$ gilt, so ist A irreduzibel.

1.9 Lemma. *Für $A \geq 0$ sind äquivalent:*

(i) A ist reduzibel.

(ii) Es gibt ein μ und ein $x \geq 0$ mit $x \not> 0$, so dass $Ax \leqq \mu x$ gilt.

Beweis. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*: Setze $J := \{j : x_j > 0\}$. Die Bedingungen für x stellen sicher, dass J die gewünschte Form hat. Aus $Ax \leqq \mu x$ schließen wir

$$\sum_j \underbrace{a_{ij}}_{\geqq 0} \underbrace{x_j}_{>0} \leqq \mu x_i = 0 \qquad \text{für } i \notin J$$

Somit gilt $a_{ij} = 0$ für $i \notin J,\ j \in J$ und A ist reduzibel.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)*: Es sei P^tAP in der Blockform aus obiger Bemerkung. Nach 1.6 existiert ein semipositiver Eigenvektor y von B_{11} zu dem Eigenwert $\mu = \lambda(B_{11})$. Für $z = (y, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$P^tAPz = (B_{11}y, 0)^t = \mu z$$

Nun leistet $x := Pz$ das gewünschte: $x \geq 0,\ x \not> 0$, und

$$Ax = APz = \mu Pz = \mu x$$

□

Für irreduzible $A \geq 0$ lassen sich die Aussagen aus 1.7 wie folgt verschärfen:

1.10 Satz. *Die nichtnegative $(n \times n)$-Matrix A sei irreduzibel. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) $\lambda = \lambda(A) > 0$.

b) Zu λ gibt es genau einen Eigenvektor in $\mathbb{P}^n$. Dieser ist positiv.

c) $(\rho I - A)^{-1} > 0$ für alle $\rho \in M(A)$.

d) (⊛) Ist $(\rho I - A)x \geqq 0$ für ein $x \geq 0$, so ist $\rho \geqq \lambda$, und $\rho = \lambda$ gilt genau dann wenn x ein Eigenvektor von A ist. Insbesondere ist λ der einzige Eigenwert von A zu dem es einen semipositiven Eigenvektor gibt.

Beweis. a) Nach 1.6 existiert ein $x \in \mathbb{P}^n$ mit $Ax = \lambda x$. Mit 1.9 folgt $x > 0$.

Falls $\lambda = 0$ wäre, würde aus $x > 0$ und der Nichtnegativität von A folgen, dass $A = 0$ war, im Widerspruch zur Irreduzibilität.

b) Sei $y \in \mathbb{P}^n$ mit $Ay = \lambda y$ und x wie oben. Wir setzen $\theta := \min_j \frac{y_j}{x_j}$. Dann ist der Vektor $u := y - \theta x$ nichtnegativ, und mindestens einer seiner Einträge ist 0. Aus

$$Au = Ay - \theta Ax = \lambda(y - \theta x) = \lambda u$$

und 1.9 folgt $u = 0$, d.h. $y = x$.

c) Sei $\rho \in M(A)$. Dann setzen wir

$$x^i := \underbrace{(\rho I - A)^{-1}}_{\geqq 0} \underbrace{e^i}_{\geq 0} \geqq 0$$

Wegen

$$(\rho I - A)x^i = e^i \geq 0$$

folgt $x^i \geq 0$. Die letzte Formel zeigt außerdem, dass $Ax^i \leqq \rho x^i$ gilt. Mit 1.9 folgt $x^i > 0$. Da i beliebig war, ist $(\rho I - A)^{-1} > 0$.

d) Wir wissen, dass mit A auch A^t irreduzibel ist, und $\lambda(A) = \lambda(A^t)$ gilt (da $M(A) = M(A^t)$ wegen $(D^{-1})^t = (D^t)^{-1}$ gilt). Also existiert ein $y > 0$ mit $A^ty = \lambda(A^t)y$ bzw. $y^tA = \lambda(A)y^t$. Damit erhalten wir

$$\underbrace{y^t}_{>0} \underbrace{(\rho I - A)x}_{\geqq 0} = \rho y^t x - y^t Ax = (\rho - \lambda) \underbrace{y^t x}_{>0}$$

und hieraus folgt die Behauptung. □

1.3 Zurück zum geschlossenen Input-Output Modell

Für Input-Output Modelle mit irreduzibler Inputmatrix A können wir nun einen einfachen Existenzsatz für Gleichgewichte beweisen:

1.11 Satz. *$A \geq 0$ sei irreduzibel.*

a) Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) $\lambda(A) = 1$

(ii) Es gibt einen Gleichgewichtsoutput.

(iii) Es gibt einen Gleichgewichtspreis.

b) Gleichgewichtsoutput und Gleichgewichtspreis sind bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt und positiv (d.h.: Im Gleichgewicht sind alle Güter begehrt ($p > 0$) und alle Güter werden produziert ($x > 0$)).

Beweis. Das folgt aus 1.10, zusammen mit der Tatsache, dass $\lambda(A) = \lambda(A^t)$ ist. □

1.4 Das offene Input-Output Modell

Im Vergleich zum geschlossenen Input-Output Modell ist das offene von größerer praktischer Bedeutung. Hier werden bestimmte Wirtschaftsbereiche als exogen ausgesondert (Haushalte, Ex- und Importe, ...). Es enthält dann nur die erzeugenden Sektoren (Industrie, Landwirtschaft, ...), welche zusätzlich zum Systeminput auch Outputs produzieren, die nach außen abgegeben werden.

Die Input-Matrix sei nichtnegativ. Das System muss (um überlebensfähig zu sein) einen Überschuss $c \geq 0$ produzieren (Interpretation: $c \cong$ Konsumgüternachfrage).

Für die Produktion des Überschusses c ist ein Output $x \geq 0$ erforderlich mit $(I - A)x = c$.

1.12 Satz. *Für das offene Input-Output Modell sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *Für alle* $c \geq 0$ *existiert ein* $x \geq 0$ *mit* $(I - A)x = c$.

(ii) *Für alle* $v \geq 0$ *existiert ein* $p \geq 0$ *mit* $p^t(I - A) = v^t$.

(iii) $D := I - A$ *erfüllt die Bedingungen aus 1.4 .*

(iv) $\lambda(A) < 1$

(v) *Das Modell ist „produktiv", d.h. es existiert ein* $x \geq 0$ *mit* $Ax < x$.

1.13 Bemerkung. Speziell besagt „$(v) \Rightarrow (i)$", dass in produktiven Modellen jeder Überschuss produziert werden kann. Erfüllt x die Bedingung (i), und p die Bedingung (ii), so folgt

$$p^t c = v^t x,\ p^t(A - I)_j = v_j = \text{ Nettogewinn bei Produktion einer Einheit des Gutes } j$$

Somit gilt

$$v^t x = \sum_j v_j x_j = \text{ Nettogewinn bei Output } x$$

Man kann sagen: „Sozialprodukt = Volkseinkommen".

Beweis von 1.12. $(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (v)$: Das folgt aus 1.4.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: folgt analog wegen $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: Das ist 1.7.ii. □

Literatur zu diesem Kapitel: [**Ka 1**], [**Ka 2**], [**Ni 1**], [**Ni 2**], [**KN**].

2 Das von-Neumannsche Modell einer expandierenden Ökonomie

Es wird folgendes Modell einer geschlossenen Ökonomie betrachtet:

$$\begin{array}{ll} m \text{ Prozesse} & P_1, \dots, P_m \\ n \text{ Güter} & G_1, \dots, G_n \end{array}$$

Der Prozess P_i wird beschrieben durch zwei Vektoren:

$$\begin{array}{ll} a^i = (a_{i1}, \dots, a_{in})^t & \text{Input-Vektor} \\ b^i = (b_{i1}, \dots, b_{in})^t & \text{Output-Vektor} \end{array}$$

a_{ij} ist die Input-Menge des Gutes j bei dem Prozess i, und b_{ij} ist die Output-Menge des Gutes j bei dem Prozess i.

Im Gegensatz zum Leontieff-Modell kann ein Prozess mehrere Güter erzeugen.

$$A := \begin{pmatrix} (a^1)^t \\ \vdots \\ (a^m)^t \end{pmatrix} \quad \text{Inputmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} (b^1)^t \\ \vdots \\ (b^m)^t \end{pmatrix} \quad \text{Outputmatrix}$$

Voraussetzungen: $A \geqq 0$ und $B \geqq 0$.

Produktionsablauf:

Der Input wird zu Beginn einer Periode bereitgestellt, während der Output am Ende der Periode anfällt.

Die Prozesse P_i werden mit der Intensität $x_i \geqq 0$ betrieben.

$$x = (x_1, \dots, x_m)^t \geqq 0 \quad \text{„Intensitätsvektor“}$$

Inputgüterbündel $x^tA \quad \rightarrow \quad$ Outputgüterbündel x^tB.

Jedem Gut G_j $(j \leqq n)$ ist ein Preis $y_j \geqq 0$ zugeordnet.

$$y = (y_1, \dots, y_n)^t \geqq 0 \quad \text{„Preisvektor“}$$

Der Preis bestimme sich wieder linear.

Für $x = e$ (d.h. alle Prozesse werden mit der Intensität 1 betrieben) ist

$$\begin{array}{ll} Ay & \text{der Vektor der Prozesskosten,} \\ By & \text{der Vektor der Prozesserlöse.} \end{array}$$

Man geht von der Vorstellung einer konstanten Wachstumsrate $a \geqq 0$ und Zinssatz $b \geqq 0$ (beide in %) aus und definiert:

$$\begin{array}{ll} \alpha := 1 + \dfrac{a}{100} & \text{„Wachstumsfaktor“} \\ \beta := 1 + \dfrac{b}{100} & \text{„Zinsfaktor“} \end{array}$$

Man betrachtet folgende Bedingungen bzw. Axiome:

(A1) $x^tB \geqq \alpha x^tA$
d.h. das Inputgüterbündel αx^tA der folgenden Periode, das im Vergleich zu dem der Ausgangsperiode um den Faktor α gewachsen ist, kann nicht größer sein als das Outputgüterbündel der Ausgangsperiode.

(A2) $\beta Ay \geqq By$ „Profitlosigkeitsbedingung“
Der Prozesserlös By übersteigt die verzinsten Prozesskosten βAy nicht.

(A3) $x^t(B - \alpha A)y = 0$
Nach (A1) ist $x^t(B - \alpha A)y \geqq 0$, also folgt mit (A3) $x^t(B - \alpha A)_j > 0 \Rightarrow y_j = 0$
d.h.: Güter j, die im Überfluss produziert werden, haben den Preis Null („freie Güter“).

(A4) $x^t(B - \beta A)y = 0$
also $((B - \beta A)y)_i < 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0$
d.h.: ineffiziente Prozesse i werden nicht betrieben.

Ein Quadrupel $(x, y, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$ heißt *Gleichgewichtslösung* (GL), wenn die Axiome (A1) - (A4) erfüllt sind. Dann heißt α *gleichgewichtiger Wachstumsfaktor.*

Man betrachtet außerdem:

(A5) $x^tBy > 0$ „Ökonomiebedingung“
d.h. der Gesamtwert der produzierten Güter ist positiv.

(A6) $\alpha = \beta$ „Ausgeglichenheitsbedingung“
„Wachstumsfaktor = Zinsfaktor“

Gilt in einer Gleichgewichtslösung (A5) bzw. (A6), so heißt sie *ökonomisch* bzw. *ausgeglichen.*

Wir betrachten die folgenden Bedingungen an die *Technologie* (A, B):

(S1) Jeder Zeilenvektor von A ist semipositiv.
$\forall i \; \exists j : a_{ij} > 0 \Leftrightarrow$ jeder Prozess benötigt einen Input.

(S2) Jeder Spaltenvektor von B ist semipositiv.
$\forall j \; \exists i : b_{ij} > 0 \Leftrightarrow$ jedes Gut G_j kann produziert werden.

Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned} L &:= \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda Aq \geqq Bq \text{ für ein } q \in \mathbb{P}^n\} \\ M &:= \{\mu \in \mathbb{R} : \mu p^tA \leqq p^tB \text{ für ein } p \in \mathbb{P}^m\} \end{aligned}$$

und setzen

$$\bar{\lambda} := \inf L \qquad \text{und} \qquad \bar{\mu} := \sup M$$

(man beachte, dass $\inf \emptyset = \infty$ gilt; desweiteren ist $\bar{\lambda} \geqq 0$).

2.1 Lemma. *a) Genau dann ist $\lambda \in L \cap M$, wenn es eine ausgeglichene Gleichgewichtslösung mit gleichgewichtigem Wachstumsfaktor λ gibt.*

b) Jede ökonomische Gleichgewichtslösung ist ausgeglichen mit positivem gleichgewichtigem Wachstumsfaktor.

Beweis. a) „$\Rightarrow$“: Es gilt $\lambda \in L \cap M \Rightarrow \exists p \in \mathbb{P}^m,\ q \in \mathbb{P}^n$ mit

$$\lambda A q \geqq Bq \quad (2.1) \qquad \text{und} \qquad \lambda p^t A \leqq p^t B. \quad (2.2)$$

Für $(x, y, \alpha, \beta) := (p, q, \lambda, \lambda)$ gelten also (A1) und (A2).
Mit $p^t(\lambda A q) \underset{(2.1)}{\geqq} p^t B q \underset{(2.2)}{\geqq} (\lambda p^t A) q$ folgen (A3) und (A4).
„$\Leftarrow$“: Weil (x, y, λ, λ) eine GL ist, folgt $\lambda \in L \cap M$ aus (A1) und (A2).

b) Sei (x, y, α, β) eine ökonomische GL. Dann gilt

$$\alpha x^t A y \underset{(A3)}{=} \underbrace{x^t B y}_{(A5) \Rightarrow > 0} \underset{(A4)}{=} \beta x^t A y$$

weshalb $x^t A y > 0$ und $\alpha = \dfrac{x^t B y}{\underbrace{x^t A y}_{>0}} = \beta$ gilt. □

Jetzt benötigen wir ein technisches Lemma:

2.2 Lemma. *Es gelten folgende Implikationen:*

a) $M \neq \mathbb{R} \Leftrightarrow M = (-\infty, \bar{\mu}],\ 0 \leqq \bar{\mu} < \infty$

b) $\bar{\lambda} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow L = [\bar{\lambda}, \infty)$

c) (S1) $\Rightarrow \bar{\lambda} < \infty,\ \bar{\mu} < \infty$

d) (S2) $\Rightarrow \bar{\lambda} > 0,\ \bar{\mu} > 0$

Beweis. a) „$\Rightarrow$“: Es gilt $0 \in M$, also $\bar{\mu} \geqq 0$.
Offenbar gilt $\mu \in M, \nu < \mu \Rightarrow \nu \in M$ und somit $\bar{\mu} = \infty \Rightarrow M = \mathbb{R}$.
Zu $\bar{\mu} \in \mathbb{R}$ wähle man $\mu_k \in M$ mit $\mu_k \to \bar{\mu}$.
Dann gilt: $\exists p^k \in \mathbb{P}^m : \mu_k (p^k)^t A \leqq (p^k)^t B$. Aufgrund der Kompaktheit von $\mathbb{P}^m$ gibt es eine konvergente Teilfolge $p^{k_l} \to p \in \mathbb{P}^m$; dann gilt $\bar{\mu} p^t A \leqq p^t B$, was $\bar{\mu} \in M$ zeigt.
„$\Leftarrow$“: klar.

b) analog zu a).

c) Für $q := \frac{1}{n} e \in \mathbb{P}^n$ sei $\sigma := \min_i (Aq)_i,\ \tau := \max_i (Bq)_i$.
Es gilt $\tau \geqq 0$ und wegen (S1) $\sigma > 0$.
Also können wir rechnen:

$$\left(\frac{\tau}{\sigma} A q - B q\right)_i = \frac{1}{\sigma}\left(\tau \underbrace{(Aq)_i}_{\geqq \sigma} - \sigma \underbrace{(Bq)_i}_{\leqq \tau}\right) \geqq \frac{1}{\sigma}(\tau\sigma - \sigma\tau) = 0$$

Also gilt $\lambda := \frac{\tau}{\sigma} \in L$, was $\bar{\lambda} < \infty$ zur Folge hat.
Sei nun $\mu \in M$. Dann existiert ein p mit $p^t B - \mu p^t A \geqq 0$, d.h. $\sum_i p_i b_{ij} - \mu \sum_i p_i a_{ij} \geqq 0$ für alle j.
Demnach gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\sum_i p_i b_{ij} - \mu \sum_i p_i a_{ij}\right) &\geqq 0 \\ \sum_i p_i \underbrace{\sum_j b_{ij}}_{\leqq n\tau} - \mu \sum_i p_i \underbrace{\sum_j a_{ij}}_{\geqq n\sigma} &\geqq 0 \\ n(\tau - \mu\sigma) &\geqq 0 \\ \mu &\leqq \frac{\tau}{\sigma} \end{aligned}$$

was $\bar{\mu} < \infty$ beweist.

d) analog zu c). □

2.3 Hauptsatz der Spieltheorie

2.3 Lemma. *Zu jeder $(m \times n)$-Matrix G existiert ein $\bar{p} \in \mathbb{P}^m$ und ein $\bar{q} \in \mathbb{P}^n$, so dass gilt:*

$$p^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G q \qquad \forall p \in \mathbb{P}^m,\ q \in \mathbb{P}^n \qquad (*)$$

Beweis. später (oder Vorlesung Spieltheorie); in diesem Skript auf Seite 54. □

Interpretation:

Jede Matrix $G = (g_{ij})$ definiert wie folgt ein Spiel:

Spieler 1 wählt eine Zeile i, Spieler 2 wählt eine Spalte j (unabhängig von Spieler 1). Spieler 2 bezahlt danach an Spieler 1 den Betrag g_{ij} (negative Auszahlung ist Gewinn).

Wählt Spieler 1 seine „Strategie“ $i \leqq m$ aufgrund der Realisierung eines Zufallsmechanismus, so ist solch eine „gemischte Strategie“ durch ein $p = (p_1, \ldots, p_m)^t \in \mathbb{P}^m$ festgelegt (Spieler 1 mischt die Strategie im Verhältnis $p_1 : p_2 : \cdots : p_m$). Nach 2.3 gibt es immer „Mischungsverhältnisse“ $\bar{p},\ \bar{q}$ mit $(*)$.

Ein solches Paar heißt *Gleichgewichtspunkt* (oder *Sattelpunkt*) des Matrixspiels.

$$W(G) := \bar{p}^t G \bar{q} = \min_{q \in \mathbb{P}^n} \max_{p \in \mathbb{P}^m} p^t G q = \max_{p \in \mathbb{P}^m} \min_{q \in \mathbb{P}^n} p^t G q$$

heißt Spielwert.

Zurück zu unserem Thema:

2.4 Satz. *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

1. *Es existiert eine GL.*
2. *Es existiert eine ausgeglichene GL.*
3. $\bar{\lambda} < \infty$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (3): (x, y, α, β) GL impliziert $\beta \in L$ wegen (A2), also $\bar{\lambda} < \infty$.
(2) $\Rightarrow$ (1): trivial.
(3) $\Rightarrow$ (2): Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Spiel mit der Spielmatrix

$$G^\alpha := B - \alpha A$$

Dann ist die „Spielwertfunktion“ $w(\alpha) = W(G^\alpha)$ stetig, weil für alle $p \in \mathbb{P}^m,\ q \in \mathbb{P}^n, \beta \geqq \alpha$ gilt (für $\delta := \max_{i,j} a_{ij}$):

$$0 \leqq p^t G^\alpha q - p^t G^\beta q = (\beta - \alpha) p^t A q \leqq (\beta - \alpha)\delta$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} w(\alpha) - w(\beta) &= \bar{p}^t G^\alpha \bar{q}^t - \tilde{p}^t G^\beta \tilde{q}^t \\ &\leqq \bar{p}^t G^\alpha \tilde{q}^t - \bar{p}^t G^\beta \tilde{q}^t \leqq (\beta - \alpha)\delta \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} w(\alpha) - w(\beta) &= \bar{p}^t G^\alpha \bar{q}^t - \tilde{p}^t G^\beta \tilde{q}^t \\ &\geqq \tilde{p}^t G^\alpha \bar{q}^t - \tilde{p}^t G^\beta \bar{q}^t \geqq 0 \end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} & w(\alpha) \leqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \min_{q \in \mathbb{P}^n} \max_{p \in \mathbb{P}^m} p^t G^\alpha q \leqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \exists q \in \mathbb{P}^n : G^\alpha q \leqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha \in L \end{aligned}$$

und analog $w(\alpha) \geqq 0 \Leftrightarrow \alpha \in M$

Daraus folgt $w(\bar{\lambda}) \leqq 0 \leqq w(0)$, da $0 \in M$. Wegen der Stetigkeit von w gibt es ein λ mit $w(\lambda) = 0$, was $\lambda \in L \cap M$ zeigt und nach 2.1 den Beweis vollendet. □

2.5 Korollar. *Erfüllt das v. Neumannsche Modell Bedingung (S1), so existiert eine ausgeglichene Gleichgewichtslösung.*

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 2.2.c und obigem Satz. □

2.6 Satz von Kemeney – Morgenstern – Thomson – Howe

2.6 Satz. *Erfüllt das von Neumannsche Modell die Bedingungen (S1) und (S2), so gilt $\bar{\lambda} \leqq \bar{\mu}$. Sowohl zu $\alpha = \bar{\lambda}$ als auch zu $\alpha = \bar{\mu}$ existiert eine ökonomische GL mit gleichgewichtigem Wachstumsfaktor α.*

Beweis. Der Beweis ist ähnlich dem Beweis des letzten Satzes, allerdings etwas komplizierter (vgl. [**Ni 1**, 9]). □

2.7 Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A und B erfüllen beide (S1) und (S2), und $A + B > 0$.
Sei (x, y, α, β) eine GL. Aufgabe 11: Dann ist diese GL ökonomisch und $\alpha = \beta =: \lambda > 0$.

$$B - \lambda A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Annahme: $y^t = (1, 0)$; dann müsste $0 \underset{(A2)}{\geqq} (B - \lambda A)y = (2 - \lambda, 1)^t$ gelten, ein Widerspruch.
Annahme: $y^t = (0, 1)$; dann ergäbe sich wie oben $0 \geqq (1, -\lambda)^t$, was wieder nicht möglich ist.
Demnach muss $y > 0$ gelten. Aus (A3) ergibt sich

$$0 = x^t(B - \lambda A) = ((2 - \lambda)x_1 + x_2, x_1 - \lambda x_2)$$

Woraus man

$$x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnen kann.
Aus (A4) ergibt sich dann des weiteren $y = x$. Insbesondere existiert genau eine normierte GL. ♢

Literatur zu Kapitel 2: [**Ka 1**], [**Ka 2**], [**Moe**], [**Ni 1**], [**Ni 2**].

3 Binäre Relationen

Es sei X eine nichtleere Menge; dann heißt eine Teilmenge $\succeq$ von $X \times X$ *binäre Relation.*

Schreibweise:

$$
\begin{aligned}
&x \succeq y :\Leftrightarrow (x,y) \in X \times X \wedge (x,y) \in \succeq \\
&x \succeq y :\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist mindestens so gut wie } y.\text{“} \\
&y \preceq x :\Leftrightarrow x \succeq y \\
&x \sim y :\Leftrightarrow x \succeq y \wedge y \succeq x \\
&x \sim y :\Leftrightarrow \text{„}x \text{ und } y \text{ sind gleich gut.“} \\
&x \succ y :\Leftrightarrow x \succeq y \wedge \neg(y \succeq x) \\
&x \succ y :\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist besser als } y.\text{“}
\end{aligned}
$$

Bei den Interpretationen wie oben spricht man von einer *Präferenzrelation.* Dies ist nur eine Bezeichnung und hat mit der unten definierten Präferenzordnung nichts zu tun.

3.1 Beispiel. a) $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung.

b) Ist $X = \{1, \ldots, n\}$, so kann jede binäre Relation als gerichteter Graph mit n Knoten $p_1, \ldots, p_n$ interpretiert werden. Ein Paar (p_i, p_j) ist genau dann eine gerichtete Kante, wenn $(j, i) \in \succeq$, d.h. $j \succeq i$ ist. $\diamondsuit$

3.2 Definition. Gegeben sei eine binäre Relation $\succeq \subset X \times X$. Die folgenden Bedingungen müssen jeweils für alle $x, y, z \in X$ gelten. Die Relation heißt

reflexiv wenn $x \succeq x$ für alle $x \in X$ gilt.

transitiv falls $(x \succeq y \wedge y \succeq z) \Rightarrow (x \succeq z)$

negativ transitiv falls $(\neg(x \succeq y) \wedge \neg(y \succeq z)) \Rightarrow \neg(x \succeq z)$

vollständig falls $x \succeq y \vee y \succeq x$ (dann ist sie insbesondere reflexiv!)

antisymmetrisch falls $(x \succeq y \wedge y \succeq x) \Rightarrow (x = y)$

symmetrisch falls $(x \succeq y) \Rightarrow (y \succeq x)$

asymmetrisch falls $(x \succeq y) \Rightarrow \neg(y \succeq x)$

Äquivalenzrelation falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Teilordnung falls sie reflexiv und transitiv ist.[4]

Halbordnung falls sie eine antisymmetrische Teilordnung ist.[5]

Präferenzordnung falls sie transitiv und vollständig ist.

Ordnung falls sie eine vollständige Halbordnung ist.

[4] Eine Teilordnung wird gelegentlich auch *Präordnung* (engl. *preorder*) genannt.
[5] engl. *partial order*, oder (inkl. der zugrunde liegenden Menge) *poset*.

3.3 Bemerkung. Es sei $\succeq$ eine transitive binäre Relation auf X. Dann ist $\sim$ transitiv und symmetrisch, und $\succ$ ist transitiv und asymmetrisch.

Ist zudem $\succeq$ reflexiv, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.
Ist $\succeq$ vollständig, so ist $\succ$ negativ transitiv.

Beweis. Übung. $\square$

Weiter definieren wir:

$$
\begin{aligned}
O(\succeq, x) = O(x) &:= \{y \in X : y \succeq x\} \\
U(\succeq, x) = U(x) &:= \{y \in X : x \succeq y\} \\
E(\succeq, x) = E(x) &:= \{y \in X : x \sim y\}
\end{aligned}
$$

3.4 Beispiel. Für $X \subset \mathbb{R}^n_+$ sei $x \succeq y$ falls ein $k \in \{0, \ldots, n\}$ existiert, so dass $x_i = y_i$ für alle $i \leqq k$ gilt und, falls $k < n$, zusätzlich $x_{k+1} > y_{k+1}$ ist. Diese Relation heißt *lexikographische Ordnung.* Sie ist insbesondere eine Ordnung im obigen Sinne. $\diamondsuit$

3.5 Definition. Es sei $\succeq$ eine binäre Relation auf X. Für $\emptyset \neq Y \subset X$ heißt ein $y \in Y$ *maximal* in Y, falls gilt

$$x \in Y,\ x \succeq y \quad \Rightarrow \quad x \sim y$$

y heißt *dominierend* (oder *größtes Element*) in Y, falls für alle $x \in Y$ gilt:

$$y \succeq x$$

Schreibweise:

$$
\begin{aligned}
\max(Y, \succeq) &:= \{y \in Y : y \text{ ist maximal in Y}\} \\
\operatorname{dom}(Y, \succeq) &:= \{y \in Y : y \text{ ist dominierend in Y}\}
\end{aligned}
$$

Ein $x \in X$ heißt *obere (untere) Schranke* von Y (für eine Teilmenge Y von X), wenn für alle $y \in Y$ gilt:

$$x \succeq y \text{ (bzw. } x \preceq y)$$

3.6 Beispiel.

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad \succeq = \{(2, 1), (3, 1)\}$$

(vgl. 3.1.b). Hier ist $\max(X, \succeq) = \{2, 3\}$ und $\operatorname{dom}(X, \succeq) = \emptyset$. $\diamondsuit$

3.7 Lemma von Zorn

3.7 Lemma. *Sei $\succeq$ eine Teilordnung auf X. Jede Teilmenge $Y \subset X$, für die $\succeq \cap\, Y \times Y$ vollständig ist (dann heißt Y* Kette*), besitze eine obere Schranke. Dann ist* $\max(X, \succeq) \neq \emptyset$.

Beweis. Dieses Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom; es wird gelegentlich auch als *Zornsches Lemma* bezeichnet. $\square$

3.8 Definition. Es sei $\succeq$ eine binäre Relation auf X.

a) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$, so heißt $\succeq$

monoton falls $x \geqq y \Rightarrow x \succeq y$
streng monoton falls $x \geq y \Rightarrow x \succ y$

für alle $x, y \in X$ gilt.

b) Ist X eine konvexe Teilmenge eines linearen Raumes, dann heißt $\succeq$

konvex falls $x \succ y,\ \lambda \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \succ y$.
(Beispiel: Ist mir eine Flasche Wein lieber als eine Flasche Saft, so ist mir auch eine halbe Flasche Wein und eine halbe Flasche Saft lieber als eine Flasche Saft.)

schwach konvex falls $x \succeq y,\ \lambda \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \succeq y$

streng konvex falls $x \succeq y,\ x \neq y,\ \lambda \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \succ y$

für alle $x, y \in X$ gilt.

c) Ist X ein topologischer Raum, dann heißt $\succeq$

abgeschlossen (oder **stetig**), falls für alle x die Mengen $O(\succeq, x)$ und $U(\succeq, x)$ abgeschlossen sind.

halbstetig Sind lediglich alle Mengen $O(\succeq, x)$ (bzw. alle Mengen $U(\succeq, x)$) abgeschlossen, so heißt $\succeq$ *nach oben (bzw. nach unten) halbstetig.*

3.9 Satz (⊛). *Es sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\succeq$ eine Präferenzordnung auf X.*

a) Ist $\succeq$ streng konvex, so auch konvex und schwach konvex.

b) Genau dann ist $\succeq$ schwach konvex, wenn jedes $O(\succeq, x)$ konvex ist.

c) Genau dann ist $\succeq$ schwach konvex, wenn jedes $O(\succ, x)$ konvex ist.

d) Ist $\succeq$ konvex und abgeschlossen, so auch schwach konvex.

e) Genau dann ist $\succeq$ stark konvex, wenn es schwach konvex ist, und kein $E(\succeq, x)$ ein Geradenstück enthält.

Beweis. a) klar.

b) Übung.

c) „$\Rightarrow$“: Seien $x, y \in O(\succ, z)$; es gelte oBdA $x \succeq y$. Für

$$z^\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$$

gilt $z^\lambda \succeq y \succ z$. Es kann nicht $z \succeq z^\lambda$ gelten, da dies $z \succeq y$ implizieren würde.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \succeq y$. Wir müssen zeigen, dass $z^\lambda \succeq y$ für alle λ gilt. Wäre $z^{\lambda_0} \prec y \preceq x$, so würde wie oben $z^{\lambda_0} \prec x$ folgen. Das wäre ein Widerspruch zur Konvexität von $O(\succ, z^{\lambda_0})$.

d) Sei $x \succeq y$. Wir müssen zeigen, dass dann $z^\lambda \succeq y$ für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt. Nehmen wir $z^{\lambda_0} \prec y$ an. Dann gibt es aufgrund der Offenheit von $U(\succ, y) = O(\succeq, y)^C$ ein $\lambda_1 < \lambda_0$ mit $z^{\lambda_1} \prec y$. Nun gilt

$$z^{\lambda_1} \in (z^{\lambda_0}, y) \text{ sowie } z^{\lambda_0} \in (z^{\lambda_1}, x) \text{ mit } (a,b) := \{\alpha a + (1-\alpha)b : \alpha \in (0,1)\}.$$

Daraus folgt mit der Konvexität von $\succeq$ sowohl $z^{\lambda_1} \succ z^{\lambda_0}$ als auch $z^{\lambda_0} \succ z^{\lambda_1}$, ein Widerspruch.

e) „$\Rightarrow$“: Aufgrund der strengen Konvexität folgt $z^\lambda \not\sim x$ für $x \sim y, x \neq y$, und die schwache Konvexität ist klar.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \succeq y, x \neq y$. Aufgrund der schwachen Konvexität ist $z^\lambda \succeq y$ für $\lambda \in (0,1)$ und aus $y \succeq z^\lambda$ würde (ebenfalls mit der schwachen Konvexität) $(y, z^\lambda) \subset E(\succeq, y)$ folgen. □

Bemerkung (⊛): Eine konvexe Präferenzordnung auf $\mathbb{R}$, die nicht schwach konvex ist, erhält man z.B., wenn man als Nutzenfunktion (vgl. Kapitel 5) die charakteristische Funktion von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

3.10 Satz (Sloss). *Sei $\emptyset \neq X$ ein kompakter topologischer Raum und $\succeq$ eine binäre Relation auf X derart, dass gilt:*

(i) $\succ$ ist azyklisch, d.h. es gibt keine $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n \prec x_1$$

(ii) Jedes $U(\succ, x)$ ist offen.

Dann ist $\max(X, \succeq)$ abgeschlossen und nicht leer.

Bemerkung: Jede abgeschlossene Präferenzordnung erfüllt diese Bedingungen.

Beweis. Aus der Identität

$$\max(X, \succeq) = \bigcap_{x \in X} U(\succ, x)^C \tag{3.1}$$

folgt die Abgeschlossenheit der zu untersuchenden Menge. Annahme: $\max(X, \succeq) = \emptyset$. Dann gilt

$$\bigcup_{x \in X} \underbrace{U(\succ, x)}_{\text{offen}} = X \underset{X \text{ kompakt}}{\Rightarrow} \text{es existiert eine endliche Teilüberdeckung mit } \bigcup_{i=1}^m U(\succ, x_i) = X$$

Aber: Nach (i) gibt es ein maximales Element y in der Menge $\{x_i : 1 \leqq i \leqq m\}$. D.h. $\neg(x_i \succ y)$ für alle i. Nun ergibt sich der folgende Widerspruch:

$$y \notin \bigcup_{i=1}^m U(\succ, x_i) = X$$ □

3.11 Satz (⊛). *Sei X ein topologischer Raum und $\succeq$ eine Präferenzordnung darauf. Dann sind äquivalent:*

(i) $\succeq$ ist abgeschlossen (d.h. stetig)

(ii) $\succeq$ ist abgeschlossen in $X \times X$ bzgl. der Produkttopologie.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Zunächst bemerken wir, dass für alle x die Menge $U(\prec, x) = O(\succeq, x)^C$ offen ist. Wir zeigen, dass $\succeq^C$ offen ist.
Sei $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \succeq$, d.h. $\bar{y} \succ \bar{x}$.
1. Fall: Es gibt ein $\hat{x}$ mit $\bar{y} \succ \hat{x} \succ \bar{x}$. Dann ist

$$G := U(\succ, \hat{x}) \times O(\succ, \hat{x})$$

eine offene Umgebung von $(\bar{x}, \bar{y})$ und es gilt $G \cap \succeq = \emptyset$.
2. Fall: Es existiert kein $\hat{x}$, das $\bar{y} \succ \hat{x} \succ \bar{x}$ erfüllt.
Dann gilt $U(\succ, \bar{y}) = U(\succeq, \bar{x})$ und $O(\succ, \bar{x}) = O(\succeq, \bar{y})$ (wie man leicht nachprüft), und

$$G := U(\succeq, \bar{x}) \times O(\succeq, \bar{y}) = \underbrace{U(\succ, \bar{y})}_{\text{offen}} \times \underbrace{O(\succ, \bar{x})}_{\text{offen}}$$

ist eine offene Umgebung von $(\bar{x}, \bar{y})$, die $G \cap \succeq = \emptyset$ erfüllt.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Das ist der erste Teil von 8.6 für $x \mapsto O(\succeq, x)$ bzw. $x \mapsto U(\succeq, x)$; oder direkt wie folgt: Zu zeigen:

$$Y := O(\succeq, y) = \{x \in X : (x, y) \in \succeq\}$$

ist abgeschlossen für alle $y \in X$. Wir zeigen, dass Y^C offen ist.

Sei $x \in Y^C$. Dann gilt $(x, y) \notin \succeq$. Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\succeq$ gibt es eine Umgebung U von (x, y), die leeren Schnitt mit $\succeq$ hat; insbesondere ist $U \cap (X \times \{y\})$ eine Umgebung von x mit den gewünschten Anforderungen.

Dass $U(\succeq, y)$ abgeschlossen ist folgt analog. □

3.12 Filter und Ultrafilter

3.12 Definition. Sei G eine nichtleere Menge.

a) Ein nichtleeres $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(G)$ heißt *Filter*, wenn gilt:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) $A \in \mathcal{F},\ B \supset A \;\Rightarrow\; B \in F$

bzw. *Ultrafilter*, wenn gilt:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{F}$

(iv) $A \in \mathcal{F}$ oder $A^C \in \mathcal{F}$ für jede Teilmenge A von G

b) Ein Filter heißt *frei*, wenn $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ ist, andernfalls heißt $\mathcal{F}$ *fixiert*.

3.13 Lemma. *a) Jeder Ultrafilter ist ein Filter.*

b) Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.

c) Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist genau dann fixiert, wenn es ein $z \in G$ mit $\mathcal{U} = \{F \subset G : z \in F\}$ gibt.

Beweis. a) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(G)$ ein Ultrafilter. Sei $A \in \mathcal{U}$ und $B \supset A$.

Falls $B \notin \mathcal{U}$, dann ist $B^C \in U$ und somit $\emptyset = A \cap B^C \in \mathcal{U}$ (nach (ii) und (iv)); ein Widerspruch, der zu zeigen war.

b) Es sei $\mathcal{F}_0$ ein Filter in G. Sei

$$\Phi := \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ ist ein Filter mit } \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0\}$$

Durch die Inklusion wird eine Teilordnung auf Φ definiert.

Für eine Kette ist ihre Vereinigung wieder ein Filter (wie man leicht nachrechnet), also enthält Φ zu jeder Kette eine obere Schranke, und wir können Zorn's Lemma anwenden:

Es gibt einen maximalen Filter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}_0$.

Wir behaupten, dass $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist. Sei $A \subset G$; wir wollen zeigen, dass entweder A oder A^C in $\mathcal{U}$ liegt. Es gilt entweder

$$U \cap A \neq \emptyset \text{ für alle } U \in \mathcal{U}$$

oder

$$U \cap A^C \neq \emptyset \text{ für alle } U \in \mathcal{U}$$

(sonst ergibt sich ein Widerspruch wie im Beweisteil (a)).

OBdA untersuchen wir den ersten Fall. Sei

$$\mathcal{U}_0 := \{B \subset G : \exists U \in \mathcal{U} \text{ mit } B \supset (U \cap A)\}$$

Dann ist $\mathcal{U}_0$ ein Filter mit $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U}$ (wie man leicht nachprüft). Aufgrund der Maximalität von $\mathcal{U}$ gilt $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$.

Nun folgt aus $G \in \mathcal{U}$ (wegen $G \supset U$ für alle $U \in \mathcal{U}$), dass $A \in \mathcal{U}$ gilt (wegen $A = A \cap G$).

c) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Ist $\mathcal{U}$ fixiert, so existiert ein $z \in G$ mit $z \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

Für $A \notin \mathcal{U}$ ist $A^C \in \mathcal{U}$. Dann ist $z \in A^C$, und $z \notin A$. Somit ist

$$\mathcal{U} = \{F \subset G : z \in F\}$$

Die Umkehrung ist trivial. □

3.14 Lemma (⊛). *Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf G ist genau dann fixiert, wenn er eine endliche Menge enthält.*

Beweis. Sei E eine endliche, in $\mathcal{U}$ enthaltene Menge. Wenn der Ultrafilter $\mathcal{U}$ nicht fixiert ist, so ist $\{z\}^C \in \mathcal{U}$ für alle $z \in G$. Mit $E = \{g_1, \ldots, g_n\}$ folgt $\emptyset = E \cap \bigcap_{i=1}^n \{g_i\}^C \in \mathcal{U}$, ein Widerspruch.

Die andere Richtung ist klar wegen (c) des obigen Lemmas. □

Literatur zu Kapitel 3: [**Fi 1**], [**Fi 2**], [**Ro 2**].

4 Tauschökonomien (Wohlfahrtstheorie)

Gegeben seien m *Konsumenten* und n *Güter*.

Für jeden Konsumenten $i \leqq m$ sei eine nichtleere *Konsummenge* $X^i \subset \mathbb{R}^n$ gegeben.

Interpretation: $x^i \in X^i$ bedeutet, dass Konsument i mit dem Güterbündel $x^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)^t$ überleben kann.

$x_l^i > 0$ bedeutet, dass die Menge x_l^i des Gutes l nachgefragt wird.

$x_l^i < 0$ bedeutet, dass die Menge $|x_l^i|$ des Gutes l abgegeben wird (z.B. Arbeit).

Jeder Konsument verfügt über eine *Erstausstattung* $a^i \in \mathbb{R}^n$, das Güterbündel, welches er anfangs besitzt.

Ferner sei für jeden Konsumenten i eine binäre Relation $\succeq^i$ auf X^i gegeben, die *Präferenzrelation des Konsumenten* i (repräsentiert den „Geschmack" des Konsumenten).

Eine *reine Tauschökonomie* $\mathcal{E}$ wird beschrieben durch ein Tupel $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i=1}^m$.

Sei nun $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i=1}^m$ eine reine Tauschökonomie.
Wenn ein Konsument auf dem Markt den Preis $p \in \mathbb{R}^n,\ p \geq 0$ beobachtet, so ist seine *Budgetmenge*

$$B^i(p, r^i) = \{x^i \in X^i : p^t x^i \leqq r^i\} \quad \text{mit } r^i = r^i(p) = p^t a^i$$

Ferner ist

$$D^i(p, r^i) = \max(B^i(p, r^i), \succeq^i)$$

die Menge der vom Konsumenten i *erwünschten Güterbündel.*

Wir betrachten oBdA nur normierte Preisvektoren $p \in \mathbb{P}^n$.

4.1 Definition. $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i=1}^m$ sei eine reine Tauschökonomie. Dann heißt ein Paar $(\bar{x}, \bar{p}) \in X \times \mathbb{P}^n$ mit $X = \prod_{i=1}^m X^i$ (kartesisches Produkt) ein *Tauschgleichgewicht,* wenn gilt:

i) $\bar{x}^i \in D^i(\bar{p}, r^i),\ r^i = \bar{p}^t a^i,\ i \leqq m$ „$\bar{x}$ ist unter $\bar{p}$ allseits erwünscht"

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^m \bar{x}^i \leqq \sum_{i=1}^m a^i$ „$\bar{x}$ ist eine Allokation (Zuteilung)"

Interpretation: Es herrscht reiner Tauschhandel, Konsument i tauscht a^i gegen $\bar{x}^i$. Jeder Konsument sucht sich ein solches Güterbündel aus, dem er innerhalb seines Budgetrahmens kein anderes vorzieht (Bedingung (i)). Das Verhalten der Konsumenten ist nonkooperativ, es hängt nur von den Gegebenheiten des Marktes (d.h. von $\bar{p}$) ab. (Cournot)

4.2 Definition. $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i=1}^m$ sei eine reine Tauschökonomie.
Dann heißt ein $\bar{x} \in X = \prod_{i=1}^m X^i$ *Pareto-optimal,* wenn gilt:

i) Es gibt kein $x \in X$ mit $\sum_{i=1}^m x^i \leqq \sum_{i=1}^m a^i$ und $x^i \succ^i \bar{x}^i$ (für alle i) .

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^m \bar{x}^i \leqq \sum_{i=1}^m a^i$

Bemerkung: Die Pareto-Optimalität hängt nur von der Gesamtanfangsausstattung $a := \sum_{i=1}^m a^i$ ab, also nicht von den einzelnen a^i.
Man sagt daher auch: $\bar{x}$ ist Pareto-optimal in $\mathcal{E}' = (X^i, \succeq^i, a)$.

Interpretation: $\bar{x}$ ist Pareto-optimal, falls sich nicht alle Konsumenten gleichzeitig besser stellen können.

4.3 1. Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie

4.3 Satz (⊛). *Ist $(\bar{x}, \bar{p})$ ein Tauschgleichgewicht einer reinen Tauschökonomie $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i=1}^m$, so ist $\bar{x}$ Pareto-optimal in $\mathcal{E}$ (bzw. $\mathcal{E}' = (X^i, \succeq^i, a)$).*

Beweis. $(\bar{x}, \bar{p})$ sei ein Tauschgleichgewicht. Dann ist $\bar{x}$ eine Allokation.

Nehmen wir an, $\bar{x}$ sei nicht Pareto-optimal.

Also gibt es ein $x = (x^1, \ldots, x^m) \in X$ mit $x^i \succ^i \bar{x}^i$ für alle i und $\sum_{i=1}^m x^i \leqq \sum_{i=1}^m a^i$.

Da $\bar{p}$ semipositiv ist folgt $\sum \bar{p}^t x^i \leqq \sum \bar{p}^t a^i$; also gibt es ein i_0 mit $\bar{p}^t x^{i_0} \leqq \bar{p}^t a^{i_0}$, d.h. $x^{i_0} \in B^i(\bar{p}, \bar{p}^t a^{i_0})$.
Das steht im Widerspruch zu $\bar{x}^{i_0} \in D^i(\bar{p}, \bar{p}^t a^{i_0})$. □

4.4 Definition. In einer reinen Tauschökonomie $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i=1}^m$ heiße ein Konsument k *unersättlich,* wenn $\succeq^k$ streng monoton ist (d.h. $y^k \geq x^k \Rightarrow y^k \succ^k x^k$), und wenn gilt

$$x^k \in X^k,\ y^k \geq x^k \ \Rightarrow\ y^k \in X^k$$

4.5 Satz. *Sei $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i=1}^m$ eine reine Tauschökonomie.*

a) Ist Konsument k unersättlich, so gilt für alle $p \in \mathbb{P}^n$

i) $D^k(p, p^t a^k) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad p > 0$.

ii) $p^t x^k = p^t a^k$ für alle $x^k \in D^k(p, p^t a^k)$ („Walras'sches Gesetz"; gilt, wenn die Gleichung für alle k erfüllt ist, unabhängig von der Unersättlichkeit der Konsumenten).

b) Sind alle Konsumenten unersättlich, so gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^m x^i = \sum_{i=1}^m a^i$ für jedes Pareto-optimale x.

Beweis. a) (i): (⊛) Es sei $p \in \mathbb{P}^n$ mit $p_l = 0$ sowie $x^k \in B^k(p, p^t a^k)$.

Dann ist $y^k \geq x^k$ für $y^k = x^k + e^l$, also $y^k \in X^k$ und $y^k \succ^k x^k$ ($\succeq^k$ ist streng monoton!).

Wegen $p^t y^k = p^t x^k \leqq p^t a^k$ ist $y^k \in B^k(p, p^t a^k)$. Folglich ist $x^k \notin D^k(p, p^t a^k)$, was $D^k(p, p^t a^k) = \emptyset$ zeigt.

(ii): Aus $x^k \in D^k(p, p^t a^k)$ folgt $p^t x^k \leqq p^t a^k$.

Annahme: Es gibt ein $\bar{x}^k \in D^k(p, p^t a^k)$ mit $p^t \bar{x}^k < p^t a^k$.
Ein Stetigkeitsargument zeigt, dass es dann ein y^k mit $y^k \geq \bar{x}^k$ und $p^t y^k < p^t a^k$ geben muss, ein Widerspruch.

b) Übung. □

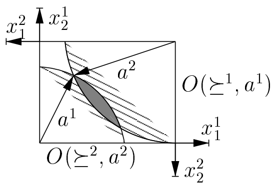
4.6 Beispiel. Sei $m = n = 2$ und $X^i = \mathbb{R}^2_+,\ i \in \{1,2\}$.

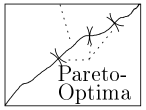
Anna hat 1 Brot und 2 Flaschen Wein.

Bodo hat 3 Brote und 1 Flasche Wein.

Sind beide unersättlich, so ist jedes Pareto-optimale $\bar{x}$ eine Umverteilung, d.h. $\bar{x}^1 + \bar{x}^2 = a^1 + a^2$. Diese Umverteilungen lassen sich geometrisch wie folgt veranschaulichen:

Edgeworth-Box:
$O(\succeq^1, a^1)$ konvex, falls $\succeq^1$ schwach konvex (nach Satz 3.9).



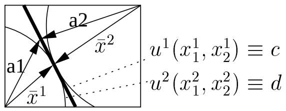


(4.1)

Die Anfangsausstattung (a^1, a^2) ist nicht Pareto-optimal. Alle Punkte innerhalb der „Linse“ werden von beiden gegenüber a^1 bzw. a^2 bevorzugt.

Ist $(\bar{x}, \bar{p})$ ein Tauschgleichgewicht, so ist $\bar{x}$ ein Pareto-Optimum, also ebenfalls eine Umverteilung. Ferner gilt das Walras'sche Gesetz, d.h. $\bar{x}^1$ liegt auf der „Budgetlinie“.

$$\bar{p}^t x^1 = \bar{p}^t a^1, \quad x^1 \in X^1$$



Es sei z.B.

$$(x_1^i, x_2^i) \succeq^i (y_1^i, y_2^i)$$

genau dann wenn

$$u^i(x_1^i, x_2^i) \geqq u^i(y_1^i, y_2^i)$$

mit $u^i(s,t) = s^{\alpha^i} t^{1-\alpha^i}$, mit $\alpha^i \in (0,1)$. (Vergleiche „Cobb-Douglas-Ökonomie“, Beispiel 5.11).

Wir wollen die Kontraktkurve (d.h. die Kurve, auf der alle Pareto-Optima liegen) berechnen:
Da beide Konsumenten in diesem Fall unersättlich sind, gilt für ein Pareto-optimales (x^1, x^2) nach 4.5.b:

$$x^1 + x^2 = a^1 + a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Für Punkte auf der Kontraktkurve muss weiter gelten:

$$\begin{array}{lllll} u^1(x_1^1, x_2^1) \equiv c & \Leftrightarrow & (x_1^1)^{\alpha^1}(x_2^1)^{1-\alpha^1} \equiv c & \Leftrightarrow & x_2^1 = \varphi_1(x_1^1) \\ u^2(x_1^2, x_2^2) \equiv d & \Leftrightarrow & (x_1^2)^{\alpha^2}(x_2^2)^{1-\alpha^2} \equiv d & \Leftrightarrow & x_2^2 = \varphi_2(x_1^2) \end{array}$$

Zur Erinnerung: Differentiation impliziter Funktionen:

$$F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x) \qquad \text{mit } F(x, \varphi(x)) = 0$$
$$F_x + F_y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \varphi' = -\frac{F_x}{F_y}$$

Wenn man dies auf obige Gleichungen anwendet, erhält man

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = -\frac{\frac{\partial u^i}{\partial x_1^i}}{\frac{\partial u^i}{\partial x_2^i}} = \frac{\alpha^i}{\alpha^i - 1} \cdot \frac{x_2^i}{x_1^i}$$

Damit sich im Punkt (x_1^1, x_2^1) die gleiche Steigung ergibt, muss folgende Bedingung gelten:

$$x_2^1 = \frac{3\alpha^2(\alpha^1 - 1)x_1^1}{\alpha^1(\alpha^2 - 1)(4 - x_1^1) + \alpha^2(\alpha^1 - 1)x_1^1} =: \kappa(x_1^1)$$

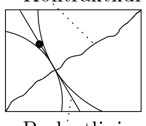
Für den Fall $\alpha^1 = \alpha^2$ ergibt sich

$$x_2^1 = \frac{3}{4} x_1^1$$

Für den Fall $\alpha^2 = 2\alpha^1$ ist

$$x_2^1 = \frac{12 x_1^1}{4 + 3x_1^1}$$

Sei $(\bar{x}, \bar{p})$ Tauschgleichgewicht.



(4.3)

$$\bar{p}^t x^1 = \bar{p}^t a^1, \quad x^1 \in X^1 \tag{4.4}$$

Das heißt

$$\bar{p}_1 \bar{x}_1^1 + \bar{p}_2 \bar{x}_2^1 = \bar{p}_1 + 2\bar{p}_2$$
$$\bar{x}_2^1 = \gamma(\bar{x}_1^1 - 1) + 2 \qquad \text{mit } \gamma = -\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2} \quad \text{Steigung der Budgetlinie}$$

Nach 4.5.a ist $\bar{p}_i > 0$.

Es ergibt sich nach einer kleinen Rechnung:

$$\gamma = \frac{\alpha^2 + 2\alpha^1}{\alpha^1 + 3\alpha^2 - 4} < 0$$
$$\bar{x}_1^1 = \frac{\alpha^1(8 - 5\alpha^2)}{2\alpha^1 + \alpha^2} > 0$$
$$\bar{x}_2^1 = \frac{1 - \alpha^1}{4 - 3\alpha^2 - \alpha^1} > 0$$

Nun kann man auch $\bar{x}^2$ und $\bar{p}$ berechnen.

1. Zahlenbeispiel: $\alpha^1 = \frac{1}{3}$, $\alpha^2 = \frac{3}{4}$.
Dann ergibt sich $\bar{x}^1_1 = 1$, $\bar{x}^1_2 = 2$, d.h.

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{x}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie $\gamma = -1$, also $\bar{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Das heißt: Die Anfangssituation ist unter $\bar{p}$ im Gleichgewicht.

2. Zahlenbeispiel: $\alpha^1 = \alpha^2 = \frac{2}{5}$.

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

4.7 Trennungssatz im $\mathbb{R}^n$

4.7 Lemma. *Seien A und B nichtleere disjunkte konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ für das*

$$c^t a \leqq \alpha \leqq c^t b$$

für alle $a \in A$, $b \in B$.

Beweis. [**Ka 1**] oder Vorlesung „Spieltheorie“. $\square$

Eine andere Version, die wir verwenden werden: *Sei $a_0 \notin B$, wobei B eine nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}^n$, so dass $c^t a_0 < c^t b$ für alle $b \in B$ gilt.*

4.8 2. Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie

4.8 Satz. *Die reine Tauschökonomie $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i=1}^m$ erfülle folgende Voraussetzungen:*

(i) *Alle $X^i \subset \mathbb{R}^n$ sind konvex.*

(ii) *Jedes $\succeq^i$ ist eine abgeschlossene, konvexe Präferenzordnung.*

(iii) *Jeder Konsument ist unersättlich.*

Sei $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m)$ ein Pareto-Optimum derart, dass für alle $p \in \mathbb{P}^n$, $i \leqq m$ gilt:

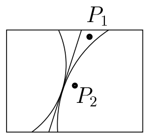
(iv) $\inf\{p^t x^i : x^i \in X^i\} < p^t \bar{x}^i$

Dann existiert ein $\bar{p} \in \mathbb{P}^n$ derart, dass $(\bar{x}, \bar{p})$ ein Tauschgleichgewicht in $\bar{\mathcal{E}} = (X^i, \succeq^i, \bar{x}^i)_{i=1}^m$ ist.

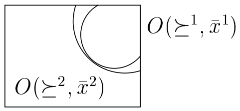
Interpretation: Bedingung (iv) ist z.B. erfüllt, falls $0 \in X^i$ und $\bar{x}^i > 0$ (für alle i) ist.

In Skizze (4.3) sind die Voraussetzungen von 4.7 erfüllt.
Die disjunkten Mengen $O(\succ^1, \bar{x}^1)$ und $O(\succ^2, \bar{x}^2)$ können durch eine Gerade (bzw. Hyperebene) getrennt werden. Diese liefert die Budgetlinie.

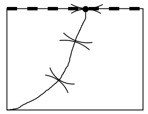
Nächste Skizze: „Falsche Steigung“ der Budgetlinie. Bedingung (iii) ist verletzt, denn es gilt $P_1 > P_2$, aber $P_2 \succ^1 P_1$.



Nächste Skizze: $O(\succ^1, \bar{x}^1)$ und $O(\succ^2, \bar{x}^2)$ können nicht durch eine Budgetlinie getrennt werden. Bedingung (ii) verletzt (nach Satz 3.9).



Nächste Skizze: Es existiert kein Tauschgleichgewicht (bei der eingezeichneten Anfangsausstattung). Wegen Bedingung (iii) müsste $\bar{p} > 0$ nach 4.5.a.i gelten. Aber da die Budgetlinie tangential zum Rand von $O(\succeq^i, \bar{x}^i)$ sein muss, wäre sie die gestrichelt eingezeichnete Linie, und $\bar{p} = (0, 1)$. Bedingung (iv) ist (für $p = (0, 1)$) verletzt.



Beweis. 1. Sei $Y^i := \{x^i \in X^i : x^i \succ^i \bar{x}^i\} \underset{(iii)}{\neq} \emptyset$.

Y^i ist konvex nach Satz 3.9 und offen wegen $Y^i = U(\succeq^i, \bar{x}^i)^C$.

Mit Y^i ist auch die „algebraische Summe“

$$Y := \left\{ \sum_{i=1}^m y^i : y^i \in Y^i \right\}$$

konvex (!), und es ist $\bar{y} := \sum_{i=1}^m \bar{x}^i \notin Y$.

Andernfalls gäbe es $x^i \in Y^i$ mit $\bar{y} = \sum_{i=1}^m x^i$. Dann gilt $x^i \succ^i \bar{x}^i$, was der Pareto-Optimalität von $\bar{x}$ widerspricht.

Nach dem Trennungssatz gibt es ein $\bar{p} \neq 0$, so dass für alle $y \in Y$ gilt:

$$\bar{p}^t \bar{y} \leqq \bar{p}^t y \tag{4.5}$$

2. *Für alle $x^i \in Y^i$ ist $\bar{p}^t x^i \geqq \bar{p}^t \bar{x}^i$.*
   Angenommen, es gibt ein $x^k \in Y^k$ mit $\bar{p}^t x^k < \bar{p}^t \bar{x}^k$. Wegen

$$(1 - \frac{1}{n})\bar{x}^i + \frac{1}{n} y^i \in Y^i \quad (\text{für alle } y^i \in Y^i \text{ da } \succeq^i \text{ konvex})$$

   existiert für jedes $i \neq k$ ein $x^i \in Y^i$ so nahe bei $\bar{x}^i$, dass gilt:

$$\begin{aligned} \bar{p}^t x^i - \bar{p}^t \bar{x}^i &< \frac{1}{m-1} \underbrace{(\bar{p}^t \bar{x}^k - \bar{p}^t x^k)}_{>0} \\ \bar{p}^t \sum_{i \neq k} x^i &< \bar{p}^t \bar{x}^k - \bar{p} x^k + \bar{p}^t \sum_{i \neq k} \bar{x}^i \\ \bar{p}^t \sum x^i &< \bar{p}^t \sum \bar{x}^i \end{aligned}$$

   Dies stellt einen Widerspruch zu (4.5) dar.

3. $x^i := \bar{x}^i + e^k \geq \bar{x}^i$, Konsument i unersättlich; daher $x^i \in Y^i$, und nach 2. gilt $p_k = \bar{p}^t e^k \geqq 0$ für alle k. Es folgt $\bar{p} \geqq 0$ und insbesondere $\bar{p} \geq 0$ (da $\bar{p} \neq 0$). Somit können wir oBdA $\bar{p} \in \mathbb{P}^n$ annehmen.

4. Es genügt zu zeigen, dass $\bar{x}^i$ maximal in $B^i(\bar{p}, \bar{p}^t \bar{x}^i)$ bezüglich $\succeq^i$ ist.

   Nehmen wir an, es gäbe ein i so dass es ein $x^i \in B^i(\bar{p}, \bar{p}^t \bar{x}^i)$ mit $x^i \succ^i \bar{x}^i$, d.h. $x^i \in Y^i$ gibt.

   Nach Voraussetzung (iv) erhalten wir:

$$\exists b^i \in X^i : \bar{p}^t b^i < \bar{p}^t \bar{x}^i \quad \underset{2.}{\Rightarrow} \quad b^i \notin Y^i$$

   Aber Y^i ist offen, und daher:

$$\exists y^i = \lambda b^i + (1 - \lambda) x^i, \quad \lambda \in (0, 1), \; y^i \in Y^i.$$

   Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{p}^t \bar{x}^i &\underset{2.}{\leqq} \bar{p}^t y^i = \lambda \bar{p}^t b^i + (1 - \lambda) \bar{p}^t x^i \\ &< \lambda \bar{p}^t \bar{x}^i + (1 - \lambda) \bar{p}^t x^i \\ (1 - \lambda) \bar{p}^t \bar{x}^i &< (1 - \lambda) \bar{p}^t x^i \\ \bar{p}^t \bar{x}^i &< \bar{p}^t x^i \end{aligned}$$

   ein Widerspruch zu $x^i \in B^i(\bar{p}, \bar{p}^t \bar{x}^i)$. □

Literatur zu Kapitel 4: [**AH**], [**De**], [**Hi**]

5 Nutzenfunktionen

5.1 Reelle Funktionen

5.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine erweitert reellwertige Funktion

$$f : X \to \bar{\mathbb{R}} \ (= [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$$

heißt *nach oben (unten) halbstetig* (kurz: *ohs, uhs*), wenn

$$\{f \geqq \alpha\} := \{x \in X : f(x) \geqq \alpha\}$$

(bzw. $\{f \leqq \alpha\}$) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Anmerkung: f ist stetig genau dann wenn f nach oben und unten halbstetig ist und „f nach oben halbstetig" ist äquivalent zu „$-f$ nach unten halbstetig".

Erinnerung: Ein topologischer Raum X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilmenge hat, die X auch überdeckt; dies ist äquivalent zu der folgenden Aussage:

Seien F_i, für $i \in I$, abgeschlossene Teilmengen von X, so gilt:

$$\forall J \subset I \text{ endlich}, \ \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$$

5.2 Lemma. *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann gilt:*

a) Jede nach oben halbstetige Funktion nimmt ein Maximum an.

b) Jede nach unten halbstetige Funktion nimmt ein Minimum an.

Beweis. Übung. □

5.3 Lemma. *Sei X ein topologischer Raum. Für erweitert reellwertige Funktionen auf X gilt:*

a) Die ohs sowie uhs Funktionen sind abgeschlossen unter Multiplikation mit positiven Skalaren.

b) Die ohs sowie uhs Funktionen sind abgeschlossen unter Addition (sofern die Summe definiert ist).

c) Die nichtnegativen uhs Funktionen sind abgeschlossen unter Produktbildung.

d) Ist $f_i, i \in I$ eine Familie von ohs Funktionen, so ist $g := \inf_i f_i$ (punktweise) ebenfalls ohs. Ist I endlich, so ist auch $h := \max_i f_i$ ohs.

Beweis. einfache Übung. □

5.4 Definition. Sei X eine konvexe Teilmenge eines Vektorraums. Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt

a) *quasikonkav (quasikonvex)*, falls alle $\{f \geqq \alpha\}$ (bzw. $\{f \leqq \alpha\}$), für $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex sind.

b) *(streng) konkav*, falls für alle $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$\infty > f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \overset{(>)}{\geqq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

c) *(streng) konvex*, wenn $-f$ (streng) konkav ist.

Ein Beispiel für eine quasikonkave Funktion, die nicht konkav ist, erhält man mit $f|_{(-\infty,0]} \equiv 0$ und $f|_{(0,\infty)} \equiv 1$.
Skizzen...

5.5 Lemma. *Sei X eine konvexe Menge. Für erweitert reellwertige Funktionen auf X gilt:*

a) Die (quasi-) konkaven sowie (quasi-)konvexen Funktionen sind abgeschlossen unter Multiplikation mit positiven Skalaren.

b) Die konkaven sowie konvexen Funktionen sind abgeschlossen unter Addition.
(Achtung: Gilt nicht für quasi-konkave Funktionen!)

c) Die (quasi-)konkaven Funktionen sind abgeschlossen unter (beliebiger) Infimum-Bildung.

d) Die (quasi-)konvexen Funktionen sind abgeschlossen unter (beliebiger) Supremums-Bildung.

e) Konkavität (Konvexität) impliziert Quasikonkavität (Quasikonvexität).

Beweis. Übung. □

5.6 Nutzenfunktionen

5.6 Definition. Sei $\succeq$ eine binäre Relation auf X. Eine Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ heißt *Nutzenfunktion (utility function)* für $\succeq$, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$x \succeq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geqq u(y)$$

5.7 Bemerkung. Ist u eine Nutzenfunktion für $\succeq$, so auch $v := g \circ u$ für jede streng monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (z.B. die arctan-Funktion oder in geeigneten Fällen die **log-Funktion**).

5.8 Definition. Sei u eine erweitert reellwertige Funktion auf einer nichtleeren Menge X. Dann wird durch:

$$x \succeq^u y \quad :\Leftrightarrow \quad u(x) \geqq u(y)$$

eine Präferenzordnung auf X definiert, die wir *von u erzeugte Präferenzordnung* nennen.

5.9 Bemerkung. Für eine erweitert reellwertige Funktion $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt:

a) Die von u erzeugte Präferenzordnung auf (dem topologischen Raum) X ist ohs (uhs, stetig), wenn u diese Eigenschaft hat.

b) Ist X konvexe Teilmenge eines Vektorraums, so gilt:

i) u quasikonkav $\Leftrightarrow$ $\succeq^u$ schwach konvex.
ii) u streng konkav $\Rightarrow$ $\succeq^u$ streng konvex.
iii) u konkav $\Rightarrow$ $\succeq^u$ ist konvex und schwach konvex.

Beweis. Übung. □

5.10 Bemerkung. Die Umkehrungen des letzten Lemmas sind im allgemeinen falsch. Beispiel:

$$u(x) := \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geqq 0 \end{cases}$$

5.11 Beispiel. a) $X = \mathbb{R}^2_+$ (zwei-Güter-Ökonomie), vgl. Beispiel 4.6.

Für jedes $\alpha \in (0,1)$ wird durch $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ eine *Cobb-Douglas-Nutzenfunktion* definiert. Setzt man

$$v(x_1, x_2) = \log u(x_1, x_2) = \alpha \log x_1 + (1-\alpha) \log x_2$$

so ist $\succeq^u = \succeq^v$ nach 5.7. Da u stetig ist, ist $\succeq^u$ abgeschlossen (d.h. stetig).

b) $X = \mathbb{R}^2_+$. Für $\alpha > 0, \beta > 0$ ist durch $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$ eine *Leontieff-Nutzenfunktion* definiert.

ganzzahliger Spezialfall: Güter: rechte bzw. linke Handschuhe. Die Nutzenfunktion bestimmt die Zahl der Handschuhpaare.

c) $X = \mathbb{R}^n_+$ $(n \neq 1)$ mit der lexikographischen Ordnung. Diese hat *keine* Nutzenfunktion.

Annahme: $\succeq = \succeq^u$. Setze

$$A_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_1 = \alpha\} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}$$

Wähle $x^\alpha, y^\alpha \in A_\alpha$ mit $x^\alpha_2 > y^\alpha_2$, also $x^\alpha \succ y^\alpha$. Dann gilt:

$$u(x^\alpha) > u(y^\alpha)$$

Wähle $q(\alpha) \in \mathbb{Q}$ mit $u(x) > q(\alpha) > u(y)$. Damit erhalten wir eine streng monotone Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. Insbesondere ist q injektiv, was die Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$ zur Folge hätte. ◊

Problem: Wann existiert zu $\succeq$ eine Nutzenfunktion?

5.12 Satz. *Sei $\succeq$ eine Präferenzordnung auf X.*
Wenn es eine abzählbare Teilmenge $T \subset X$ gibt, so dass aus $x_2 \succ x_1$ die Existenz eines $t \in T$ mit $x_2 \succ t \succ x_1$ folgt, dann existiert eine Nutzenfunktion u mit $\succeq^u = \succeq$.

Beweis. Übung. □

Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$.
Ein maximales nicht entartetes Intervall $I \subset S^C$ mit unterer und oberer Schranke in S heißt *Lücke*.

Problem: Wann existiert eine stetige Nutzenfunktion zu $\succeq$?
Nach 5.9 muss $\succeq$ abgeschlossen sein.

5.13 Lemma. *Sei $\succeq$ eine abgeschlossene Präferenzordnung und u eine Nutzenfunktion zu $\succeq$. Sind alle Lücken von $u(X)$ offen, so ist u stetig.*

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen:

$$\{u \geqq \alpha\} \text{ ist abgeschlossen} \tag{5.1}$$
$$\{u \leqq \alpha\} \text{ ist abgeschlossen} \tag{5.2}$$

(5.1): *Fall 1:* $\alpha \in u(X)$, d.h. $\exists y \in X$ mit $u(y) = \alpha$. Es gilt:

$$\{u \geqq \alpha\} = \{x \in X : u(x) \geqq u(y)\} = O(y, \succeq) \text{ (abgeschlossen)}$$

Fall 2: Es gibt eine (offene) Lücke $I = (a, b)$ von $u(X)$ mit $\alpha \in I$. Dann gilt

$$\{u \geqq \alpha\} = \{u \geqq b\} \text{ (abgeschlossen nach Fall 1)}$$

Fall 3: Es gibt drei weitere Möglichkeiten: $\alpha \leqq \inf u$ oder $\alpha > \sup u$ oder es gibt eine Folge $\alpha_n \nearrow \alpha$ und $\alpha_n \in u(X)$ für alle n.[6] Die ersten beiden dieser Möglichkeiten sind trivial; im letzten Fall gilt

$$\{u \geqq \alpha\} = \bigcap_n \underbrace{\{u \geqq \alpha_n\}}_{\text{abg. nach Fall 1}} \quad \text{(abgeschlossen)}$$

Der Beweis von (5.2) ist analog. □

5.14 Lemma. *Seien I und J zwei nichtleere offene Intervalle in $\mathbb{R}$ und $A \subset I, B \subset J$ abzählbare dichte Teilmengen. Dann existiert eine streng monoton wachsende bijektive Funktion $g : A \to B$.*

Beweis. Sei $A = \{a^1, a^2, \ldots\}$ und $B = \{b^1, b^2, \ldots\}$
1. Schritt: Setze $a_1 := a^1$ und $b_1 := b^1$.
2. Schritt: Setze $b_2 := b^2$. Falls $b_2 > b_1$ $(b_2 < b_1)$, wähle $a_2 \in A$ mit $a_2 > a_1$ $(a_2 < a_1)$.
3. Schritt: Wähle $a^k \in A \backslash \{a_1, a_2\}$ mit minimalem k; setze $a^3 := a^k$. Wähle $b_3 \in B$ so dass die Lage relativ zu b_1 und b_2 der Lage von a_3 zu a_1 und a_2 entspricht.
4. Schritt: Wähle $b^k \in B \backslash \{b_1, b_2, b_3\}$ mit minimalem k und setze $b_4 := b^k$. Wähle ein „passendes" a_4.
Fährt man so fort, so erhält man Folgen $a_n \in A$ und $b_n \in B$ mit $a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$.
Nach Konstruktion gilt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Daher wird durch $g(a_i) := b_i$ eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften definiert. □

[6] das passiert, wenn α ein „Loch" in $u(X)$ ist oder $\sup u = \alpha \notin u(X)$.

5.15 Lemma. *Sei $\emptyset \neq S \subset [0,1]$.*
Dann existiert eine streng monoton wachsende Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ derart, dass alle Lücken von $f(S)$ offen sind.

Beweis (Bowen). Sind alle Lücken von S offen, so ist nichts zu zeigen.

Andernfalls existieren höchstens abzählbar viele (disjunkte) Lücken I_n, die nicht offen sind. Sei $T := \bigcup_n I_n$. Wir definieren (für $x \in [0,1]$)

$$g(x) := x - \lambda(T \cap [0,x]) \qquad \text{(Lebesgue-Maß)}$$

Dann gilt:

i) g ist monoton nicht fallend und stetig, denn:

$$y \geqq x \quad \Rightarrow \quad y - x \geqq g(y) - g(x) = -\underbrace{\lambda(T \cap [x,y])}_{\leqq\, y-x} + y - x \geqq 0$$

insbesondere gilt $g|_{I_n} \equiv const.$

ii) Sei $\mathcal{H} := \{H = (\{g = t\} \cap S) : t \in \mathbb{R}, |H| > 1\}$. Aus (i) folgt, dass die Mengen $\{g = t\}$ paarweise disjunkte (abgeschlossene) Intervalle sind, also $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots\}$.

iii) Wenn $a, b \in H_k$ mit $a < b$ sind, dann gibt es ein $c \in H_k$ mit $a < c < b$. Bei Annahme des Gegenteils erhält man

$$\emptyset = H_k \cap (a,b) \underbrace{=}_{g|_{(a,b)} \equiv const.} S \cap (a,b) \quad \Rightarrow \quad (a,b) \text{ offene Lücke von } S \quad \Rightarrow \quad (a,b) \cap T = \emptyset$$
$$\Rightarrow \quad g(b) > g(a) \quad \text{(Widerspruch)}$$

iv) Sei D_k eine abzählbare dichte Teilmenge von H_k (welche nach (iii) existiert). Mit vorigem Lemma schließen wir auf eine streng monoton wachsende bijektive Funktion

$$g_k : D_k \backslash \{\inf D_k, \sup D_k\} \to (0, 2^{-k}) \cap \mathbb{Q}$$

Falls D_k ein Minimum bzw. Maximum hat, definiert man

$$g_k(\inf D_k) := 0 \quad \text{bzw.} \quad g_k(\sup D_k) := 2^{-k}$$

Für $x \in [0,1]$ sei

$$h_k(x) := \begin{cases} g_k(x) & x \in D_k \\ 0 & x \leqq \inf D_k \\ \sup\limits_{z \in D_k,\, z \leqq x} g_k(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist h_k monoton nicht fallend und stetig, da $h_k([0,1])$ keine Lücken enthält (h_k ist eine Nutzenfunktion auf $\bar{D}_k$ bzgl. der üblichen Ordnung, woraus nach 5.13 die Stetigkeit folgt).

v) Setze

$$r(x) = \sum_k h_k(x)$$

Dann ist r stetig, da

$$0 \leqq r(x) - \sum_{k=1}^{N} h_k(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \underbrace{h_k(x)}_{\leqq 2^{-k}} \leqq 2^{-N} \to 0$$

und der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist.

Nun definieren wir die stetige Funktion

$$f := g + r$$

vi) f ist streng monoton wachsend auf S, denn:

h_k ist monoton nicht fallend, somit auch r.

Seien $x, y \in S$ mit $x < y$.

Fall 1: $\exists k : x, y \in H_k$; nach (iii) und weil D_k dicht in H_k ist, gibt es ein $z_1 \in D_k \cap (x,y)$ und ein $z_2 \in D_k \cap (z_1, y)$. Jetzt gilt:

$$h_k(x) \leqq h_k(z_1) = g_k(z_1) < g_k(z_2) = h_k(z_2) \leqq h_k(y)$$

Fall 2: Falls x und y nicht in einem gemeinsamen H_k liegen, so gilt $g(x) < g(y)$ aufgrund der Definition der H_k's.

vii) Es bleibt zu zeigen, dass $f(S)$ nur offene Lücken hat.

Annahme: $f(S)$ hat eine Lücke I mit $b = \sup I \in I$. Da I ein nicht entartetes Intervall ist, gibt es $a < b$ mit $a \in I$, folglich $[a,b] \cap f(S) = \emptyset$. Wenn man nun $c \in \{f = a\}$ und $d := \max\{f = b\}$ setzt, gilt $c < d$, sowie $d \notin S$. Aber es gibt eine Folge $(b_n)_n$, die von oben gegen b konvergiert mit $b_i \in f(S)$. Insbesondere gibt es $\tilde{b}_i \in S$ mit $f(\tilde{b}_i) = b^i$. Aufgrund der Stetigkeit von f^{-1} (die mit der Monotonie von f begründet wird) gilt $\tilde{b}_i \searrow d$; d.h. d ist ein Häufungspunkt von S.

Es gilt $[c,d] \cap S = \emptyset$ (sonst $a = f(c) \leqq f(x) \leqq f(d) = b$ für ein $x \in S$), also $[c,d] \subset T$ (da d ein Häufungspunkt von S ist, ist $[c,d]$ Teil einer nicht-offenen Lücke), folglich $g(c) = g(d)$. Es gilt jedoch für alle k, dass $([c,d] \cap H_k) \subset [c,d] \cap S = \emptyset$; also $h_k(c) = h_k(d)$. Jetzt haben wir $a = f(c) = f(d) = b$, ein Widerspruch.

Analog folgt $\inf I \notin I$ für jede Lücke I. □

Anmerkung des Autors: Was anschaulich passiert ist das Folgende: Die nicht-offenen Lücken werden „zusammengeschoben“; halboffene werden geschlossen und von geschlossenen bleibt nur eine Einpunkt-Lücke übrig. Die Konstruktion ist deswegen so kompliziert, weil es abzählbar viele solcher Lücken geben kann, sowie „Löcher“ bzw. Einpunkt-Lücken. Dennoch denke ich, dass man den letzten Beweisschritt mit dieser Anschauung wie folgt vereinfachen kann:

Beweis. *vii)* Da f stetig und streng monoton auf S ist, sind alle Lücken in $f(S)$ Bilder von Lücken in S, unterschiedliche Lücken schneiden sich im Bild nicht und offene Lücken werden auf offene Lücken abgebildet.

Es genügt also zu zeigen, dass $f|_{I_n} \equiv const$ für alle n gilt.

Wir wissen $g|_{I_n} \equiv const$. Es gilt $I_n \cap H_k = \emptyset$ für alle k. Daraus folgt $I_n \cap D_k = \emptyset$, woraus (da I_n ein Intervall ist) $h_k|_{I_n} \equiv const$ folgt, was die Behauptung beweist. □

5.16 Satz. *Sei X ein topologischer Raum mit einer Präferenzordnung $\succeq$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

i) $\succeq = \succeq^u$ *für ein stetiges u.*

ii) $\succeq = \succeq^v$ *für ein v und $\succeq$ ist abgeschlossen.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Das folgt aus 5.9.a.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $\succeq = \succeq^v$. Nach 5.7 können wir $v(X) \subset [0,1]$ annehmen.

Für $S = v(X)$ wähle f gemäß dem vorigen Lemma 5.15 und setze $u = f \circ v$. Dann gilt $\succeq = \succeq^u$, und aus 5.13 folgt, dass u stetig ist. □

5.17 Satz von Debreu

5.17 Satz. *Sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ und $\succeq$ eine abgeschlossene Präferenzordnung auf X. Dann existiert eine stetige Nutzenfunktion zu $\succeq$.*

Beweis. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller Kugeln $K^m(x) := \{z \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| < 1/m\}$ mit $x \in \mathbb{Q}^n$.

Dann ist $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis in $\mathbb{R}^n$ (d.h. im Wesentlichen, dass für jedes Element x einer offenen Menge U ein n mit $x \in K_n \subset U$ existiert).

Setze $B_n := K_n \cap X$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie für $x \in X$

$$\begin{aligned} N_x &:= \{n \in \mathbb{N} : B_n \subset U(\succ, x)\} \\ v(x) &:= \sum_{n \in N_x} 2^{-n} \end{aligned}$$

Dann ist $\succeq^v = \succeq$, denn:

Aufgrund der Transitivität von $\succeq$ folgt aus $y \preceq z$, dass $N_y \subset N_z$ ist, und somit $v(y) \leqq v(z)$ gilt.

Sei nun $v(y) \leqq v(z)$. Nehmen wir $y \succ z$ an, d.h. $z \in U(\succ, y)$, einer offenen Menge. Es gibt also ein n mit $z \in B_n \subset U(\succ, y)$. Das bedeutet $n \in N_y \backslash N_z$ (da $z \notin U(\succ, z)$). Wir erhalten (mit $y \succ z$): $N_y \supsetneqq N_z$, also $v(y) > v(z)$, der gewünschte Widerspruch.

Die Behauptung folgt nun aus dem vorherigen Satz. □

Literatur zu Kapitel 5: [**AH**], [**De**], [**HK**], [**Ro 2**]

ferner auch: [**Bo**] Bowen, R.: *A new proof of a theorem in utility theory.* Economic Review 9 (1968), S. 374.

6 Nichtexistenz einer gerechten Gesellschaftsordnung

Im folgenden sei G ($|G| \geqq 2$) eine Menge von Entscheidungsträgern und A ($|A| \geqq 2$) eine Menge von Alternativen. Mit $\mathcal{P}$ bezeichnen wir die Menge aller asymmetrischen, negativ transitiven (binären) Relationen auf A.

6.1 Bemerkung. Jedes $\succ \in \mathcal{P}$ ist transitiv, und es gilt $\neg(x \succ x)$ für alle $x \in A$.

Beweis. Übung. □

6.2 Definition. Ein Element $f \in \mathcal{P}^G$, d.h. eine Abbildung $f : G \to \mathcal{P}$ heißt *Präferenzstruktur.*

Eine Abbildung $\sigma : \mathcal{P}^G \to \mathcal{P}$ heißt *soziale Wohlfahrtsfunktion (SWF).*

Gelegentlich betrachten wir auch Abbildungen $\tau : \mathcal{P}^G \to \mathcal{R}$, wobei $\mathcal{R}$ die Menge aller binären (Präferenz-)Relationen auf A sei[7]. Solch ein τ heiße *kollektive Auswahlfunktion (KAF).*

Interpretation: Besitzt der Entscheidungsträger $i \in G$ eine Präferenzordnung $\succeq^i$, so wird durch die strikte Relation $x \succ^i y \Leftrightarrow x \succeq^i y \wedge \neg(y \succeq^i x)$ ein $\succ^i \in \mathcal{P}$ definiert (vgl. 3.3).

Ein $f \in \mathcal{P}^G$ ordnet jedem $i \in G$ ein $\succ^i \in \mathcal{P}$ zu.

Dieses f spiegelt die Präferenzen der einzelnen Entscheidungsträger wieder.

Durch ein geeignetes „Wahlverfahren" soll nun jedem solchen f mittels einer SWF σ eine kollektive Präferenzrelation $\succ = \sigma(f)$ zugeordnet werden.

Problem: Wann existiert eine „vernünftige" SWF?

6.3 Beispiel. a) Die konstante Abbildung $\sigma : \mathcal{P}^G \to \mathcal{P}$ mit $\sigma(f) \equiv \succ^c$ (dieses $\succ^c$ kann etwas wie eine Tradition bedeuten) ist eine SWF. Da sie die Präferenzen der Entscheidungsträger nicht berücksichtigt, ist sie sehr undemokratisch.

b) Die „Projektionsabbildung" $\sigma : \mathcal{P}^G \to \mathcal{P}$ mit $\sigma(f) = f(i_0)$ für festes i_0.

Ebenfalls undemokratisch (aber typisch, wie wir sehen werden). Hier bestimmt allein der Entscheidungsträger i_0.

c) Ein beliebtes „demokratisches" Entscheidungsverfahren ist (im Fall $|G| < \infty$) die Mehrheitsentscheidung:

$$\sigma^* : \mathcal{P}^G \to \mathcal{R} \quad \text{mit}$$
$$(x, y) \in \sigma^*(f) \quad \Leftrightarrow \quad |\{i \in G : (x, y) \in f(i)\}| > |\{i \in G : (y, x) \in f(i)\}|$$

Für jedes $f \in \mathcal{P}^G$ erhalten wir so eine asymmetrische Relation, die aber im allgemeinen nicht transitiv (und nach Bem. 6.1 auch nicht neg. transitiv) ist[8]. Also $\sigma^* \notin \mathcal{P}$. ◇

[7] Wobei, wie in Kapitel 3 angemerkt, „Präferenzrelation" nicht „Präferenzordnung" heißt.

[8] Ich bevorzuge die Notation $(x, y) \in f(i)$ gegenüber der auch üblichen Schreibweise $xf(i)y$.

6.4 Paradoxon von Condorcet (1785)

6.4 Beispiel. Es gebe drei Gemeinderäte $1, 2, 3$ und drei Alternativen: Den Bau eines Altenheims (A), eines Kindergartens (K) sowie den Bau einer Schule (S).

Die Präferenzordnungen seien:

$$\succ^1 = \{(A, K); (K, S); (A, S)\}$$
$$\succ^2 = \{(S, A); (A, K); (S, K)\}$$
$$\succ^3 = \{(K, S); (S, A); (K, A)\}$$

Bei Abstimmung durch Mehrheitsentscheidung erhält man folgende Tabelle:

(x, y)	(A, K)	(A, S)	(K, S)	(K, A)	(S, A)	(S, K)
$\|\{i \in G : x \succ^i y\}\|$	2	1	2	1	2	1

Das heißt für f mit $f(i) = \succ^i$ ist $\sigma^*(f) = \{(A, K); (K, S); (S, A)\}$. Für $\succ^* = \sigma^*(f)$ gilt:

$$A \succ^* K \succ^* S \succ^* A$$ ◇

Notation: Für $H \subset G$, $x, y \in A$ und $f \in \mathcal{P}^G$ setzen wir $(x, y) \in f(H) \Leftrightarrow (x, y) \in f(i)$ für alle $i \in H$.

Das heißt: Alle Mitglieder der „Familie" H ziehen x dem y vor. Für $H = \emptyset$ ist diese Aussage leer (und insbesondere wahr).

Für $f, g \in \mathcal{P}^G$ und $x, y \in A$ schreiben wir $f = g$ auf $\{x, y\}$, falls

$$\{i \in G : (x, y) \in f(i)\} = \{i \in G : (x, y) \in g(i)\}$$
und
$$\{i \in G : (y, x) \in f(i)\} = \{i \in G : (y, x) \in g(i)\}$$

6.5 Definition. Für eine KAF $\sigma : \mathcal{P}^G \to \mathcal{R}$ betrachten wir folgende Eigenschaften („Axiome"):

(P) $\forall x, y \in A,\ \forall f \in \mathcal{P}^G : (x, y) \in f(G) \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in \sigma(f)$ (schwaches Paretoprinzip)
„Sind sich alle einig, so entscheidet das Kollektiv wie die Individuen."

(U) $\forall x, y \in A,\ \forall f, g \in \mathcal{P}^G : f = g$ auf $\{x, y\} \quad \Rightarrow \quad \sigma(f) = \sigma(g)$ auf $\{x, y\}$
(Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen)
„Unterscheiden sich f und g in Bezug auf das Paar (x, y) nicht, so sind auch die kollektiven Präferenzen $\sigma(f)$ und $\sigma(g)$ in Bezug auf (x, y) gleich."

(D) Es gibt keinen Diktator, d.h. es gibt kein $i_0 \in G$, so dass für alle x, y und alle $f \in \mathcal{P}^G$ gilt: $(x, y) \in f(i_0) \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in \sigma(f)$. „Es gibt keine Person, welche allein entscheidet."

6.6 Beispiel. Im Falle $|G| < \infty$ ist die Mehrheitsentscheidung σ^* eine KAF, welche die obigen drei Axiome erfüllt.

Genau dann ist σ^* eine SWF, wenn $|A| = 2$ ist.

Beweis. Übung. □

Im Falle $|A| = 2$ ist also für endliches G „die Welt in Ordnung". Andernfalls gilt jedoch das folgende „katastrophale" Ergebnis:

6.7 Unmöglichkeitssatz von Arrow

6.7 Satz. *Im Falle $|G| < \infty$ und $|A| > 2$ gibt es keine SWF, welche den Axiomen aus 6.5 genügt.*

6.8 Möglichkeitssatz von Fishburn

6.8 Satz. *Im Falle $|G| = \infty$ und $|A| > 2$ gibt es immer eine SWF, welche den Axiomen aus 6.5 genügt.*

Beweise. später. □

Voraussetzungen: Im Folgenden sei $|A| > 2$. Mit Σ bezeichnen wir die Menge aller sozialen Wohlfahrtsfunktionen, welche den Bedingungen (P) und (U) aus 6.5 genügen.

6.9 Lemma. *Sei $\sigma \in \Sigma$ und*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q} &:= \left\{S \subset G : \exists x, y \in A, \exists f \in \mathcal{P}^G : \quad (x,y) \in f(S) \wedge (y,x) \in f(S^C) \wedge (x,y) \in \sigma(f)\right\}\\
\mathcal{Q}' &:= \left\{S \subset G : \exists x, y \in A, x \neq y, \forall f \in \mathcal{P}^G : (x,y) \in f(S) \wedge (y,x) \in f(S^C) \Rightarrow (x,y) \in \sigma(f)\right\}\\
\mathcal{Q}'' &:= \left\{S \subset G : \forall x, y \in A, \forall f \in \mathcal{P}^G : \quad (x,y) \in f(S) \wedge (y,x) \in f(S^C) \Rightarrow (x,y) \in \sigma(f)\right\}
\end{aligned}$$

Dann gilt $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' = \mathcal{Q}''$.

Beweis. Wir sehen sofort, dass $\mathcal{Q}'' \subset \mathcal{Q}'$ gilt.

Untersuchen wir $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$: Sei $S \in \mathcal{Q}'$ und x, y mit den Eigenschaften aus der Definition von $\mathcal{Q}'$. Wir wollen zeigen, dass es ein $f \in \mathcal{P}^G$ gibt mit $(x,y) \in f(S) \wedge (y,x) \in f(S^C)$. Wir definieren zunächst die Nutzenfunktionen

$$u^i(z) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & z = x \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} \text{ für } i \in S \qquad u^i(z) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & z = y \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} \text{ für } i \in S^C$$

Dann hat f mit $(s,t) \in f(i) \Leftrightarrow u^i(s) > u^i(t)$ die gewünschte Eigenschaft. Eine derart definierte Relation ist in $\mathcal{P}$, da sie die zu einer Präferenzordnung gehörende strikte Relation ist (vgl. Interpretation nach 6.2).
Das beendet den Beweis von $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$.

$\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}'$: Wähle $S \in \mathcal{Q}$ beliebig. Es existieren also $x', y' \in A$ und $g \in \mathcal{P}^G$ mit den Eigenschaften aus der Definition von $\mathcal{Q}$ (Insbesondere gilt $x' \neq y'$, weil $g(i)$ für alle i asymmetrisch ist).

Für jedes $f \in \mathcal{P}^G$ mit $(x', y') \in f(S)$ und $(y', x') \in f(S^C)$ gilt $f = g$ auf $\{x', y'\}$. Mit (U) folgt somit $\sigma(f) = \sigma(g)$ auf $\{x', y'\}$, also $(x', y') \in \sigma(f)$. Somit gilt $S \in \mathcal{Q}'$, was $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$ beweist.

$\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}''$: Wähle $S \in \mathcal{Q}'$ beliebig.

Für $(x,y) \in A \times A$ betrachte die Eigenschaft:

$$(x,y) \in f(S) \wedge (y,x) \in f(S^C) \Rightarrow (x,y) \in \sigma(f) \qquad \forall f \in \mathcal{P}^G \tag{E}$$

Wähle ein Paar $(x', y') \in A \times A$ mit $x' \neq y'$, welches (E) erfüllt. Ein solches existiert weil S in $\mathcal{Q}'$ ist.

a) Wir zeigen: Für jedes $z \in A$ wird (E) von (x', z) erfüllt. Nehmen wir also für ein $f \in \mathcal{P}^G$ an, dass $(x', z) \in f(S)$ und $(z, x') \in f(S^C)$ gilt. Zunächst bemerken wir, dass oBdA $z \neq y'$ sowie $S \neq G$ angenommen werden kann (letzteres folgt aus (P)); insbesondere gilt $S^C \neq \emptyset$.
Aus $(z, x') \in f(S^C)$ folgt $z \neq x'$, also $|\{x', y', z\}| = 3$.
Ferner ist $S \neq \emptyset$, denn andernfalls gilt $(y', x') \in f(G)$ und $(y', x') \in \sigma(f)$ folgt aus (P); das wäre ein Widerspruch zu der Annahme $(x', y') \in \sigma(f)$.

Wir konstruieren ein $g \in \mathcal{P}^G$ mit

$$(x', y') \in g(S), \quad (y', z) \in g(S) \quad \text{und} \quad (y', z) \in g(S^C), \quad (z, x') \in g(S^C)$$

Definiere

$$u^i(t) = \left\{\begin{array}{ll} 2 & t = x' \\ 1 & t = y' \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} \text{ für } i \in S \qquad u^i(t) = \left\{\begin{array}{ll} 2 & t = y' \\ 1 & t = z \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} \text{ für } i \in S^C$$

und setze $(s,t) \in g(i) \Leftrightarrow u^i(s) > u^i(t)$.

Dann hat g die gewünschten Eigenschaften.
Insbesondere erhalten wir: $(x', y') \in g(S), (y', x') \in g(S^C)$, also $(x', y') \in \sigma(g)$ nach (E). Zusammen mit $(y', z) \in \sigma(g)$ (aufgrund von (P) und $(y', z) \in g(G)$) erhalten wir, da $\sigma(g)$ nach 6.1 transitiv ist, $(x', z) \in \sigma(g)$ $(*)$.

Nach Konstruktion gilt $g = f$ auf $\{x', z\}$. Das beendet mit (U) und $(*)$ diesen Teil.

b) Analog zeigt man, dass die erste Komponente eines Tupels (x', y') mit (E) beliebig ausgetauscht werden kann. □

Jedem $\sigma \in \Sigma$ sei im folgenden das in obigem Lemma definierte Mengensystem $\mathcal{Q}_\sigma := \mathcal{Q}$ $(= \mathcal{Q}' = \mathcal{Q}'')$ zugeordnet.

6.10 Lemma. *Für jede SWF $\sigma \in \Sigma$ ist $\mathcal{Q}_\sigma$ ein Ultrafilter.*

Beweis. Sei $\sigma \in \Sigma$ beliebig.
Zunächst bemerken wir, dass $\mathcal{Q}_\sigma$ nicht leer ist, da $G \in \mathcal{Q}_\sigma$ gilt.

i) $\emptyset \notin \mathcal{Q}_\sigma$. Das haben wir im Beweis des letzten Lemmas gesehen.

ii) *Falls $S, T \in \mathcal{Q}_\sigma$, dann auch $S \cap T \in \mathcal{Q}_\sigma$.* Betrachte die disjunkte Zerlegung

$$G = \underbrace{(S \cap T)}_{S_1} \cup \underbrace{(S \backslash T)}_{S_2} \cup \underbrace{(T \backslash S)}_{S_3} \cup \underbrace{(S \cup T)^C}_{S_4}$$

Wähle $x, y, z \in A$ paarweise verschieden, und $g \in \mathcal{P}^G$ mit

$$\begin{array}{llll}
(z,x) \in g(S_1), & (x,y) \in g(S_1) \quad \text{und} & (x,y) \in g(S_2), & (y,z) \in g(S_2)\\
(y,z) \in g(S_3), & (z,x) \in g(S_3) \quad \text{und} & (y,x) \in g(S_4), & (x,z) \in g(S_4)
\end{array}$$

Für die Existenz einer solchen Präferenzstruktur lässt sich eine Konstruktion wie oben direkt angeben.

Aus der oberen Zeile kann man $(x,y) \in g(S)$ ablesen und aus der unteren $(y,x) \in g(S^C)$. Da $S \in \mathcal{Q}_\sigma = \mathcal{Q}''$ ist, können wir $(x,y) \in \sigma(g)$ folgern. Analog folgt $(z,x) \in \sigma(g)$.

Aus den letzten beiden Schlüssen sehen wir insbesondere $(z,y) \in \sigma(g)$. Wenn wir jetzt beachten, dass $(z,y) \in g(S_1)$ und $(y,z) \in g(S_1^C)$ gilt, so sehen wir dass S_1 die Bedingungen für $\mathcal{Q}$ erfüllt. Das heißt: $S \cap T \in \mathcal{Q}_\sigma$.

iv) *Für $S \subset G$ gilt $S \in \mathcal{Q}_\sigma$ oder $S^C \in \mathcal{Q}_\sigma$.* Wähle $x, y, z \in A$ paarweise verschieden, sowie $f \in \mathcal{P}^G$, so dass gilt:

$$(x,y) \in f(S), \quad (y,z) \in f(S) \quad \text{und} \quad (z,x) \in f(S^C), \quad (x,y) \in f(S^C)$$

Nun gilt $(x,z) \in \sigma(f)$ oder $(z,y) \in \sigma(f)$; Denn falls beide falsch wären, würde $\neg(x,y) \in \sigma(f)$ aus der neg. Transitivität von $\sigma(f)$ folgen, was wegen $(x,y) \in f(G)$ im Widerspruch zu (P) steht.

Fall 1: Gelte zunächst $(x,z) \in \sigma(f)$: Wenn wir die Konstruktion betrachten, sehen wir dass bezüglich S für x,z die Bedingungen für $\mathcal{Q}$ erfüllt sind, also $S \in \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\sigma$.

Fall 2: Gelte nun $(z,y) \in \sigma(f)$. Hier sehen wir, dass bezüglich S^C für y,z die Bedingungen für $\mathcal{Q}$ erfüllt sind, also $S^C \in \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\sigma$. □

6.11 Lemma (⊛). *Sei $\sigma \in \Sigma$. Dann gilt*

$$\mathcal{Q}_\sigma = \mathcal{U} := \left\{U \subset G : \forall x,y \in A \wedge \forall f \in \mathcal{P}^G.\ (x,y) \in f(U) \Rightarrow (x,y) \in \sigma(f)\right\}$$

Beweis. $\mathcal{Q}_\sigma \supset \mathcal{U}$: Das folgt sofort aus der Definition von $\mathcal{Q}''$.

$\mathcal{Q}_\sigma \subset \mathcal{U}$: Sei $U \in \mathcal{Q}_\sigma$, sowie x,y,f mit $(x,y) \in f(U)$ (insbesondere $x \neq y$).
Zu zeigen: $(x,y) \in \sigma(f)$. Seien

$$S_1 := \{i : (x,y) \in f(i)\}, \qquad S_2 := \{i : (y,x) \in f(i)\}, \qquad S_3 := (S_1 \cup S_2)^C$$

Wegen $U \subset S_1$ und weil $\mathcal{Q}_\sigma$ ein Ultrafilter ist, können wir $U = S_1$ annehmen. Definiere

$$u^i(t) = \left\{\begin{array}{ll} 2 & t = x \\ 1 & t \in A\backslash\{x,y\} \\ 0 & t = y \end{array}\right\} \text{ für } i \in S_1; \qquad u^i(t) = \left\{\begin{array}{ll} 2 & t = y \\ 1 & t \in A\backslash\{x,y\} \\ 0 & t = x \end{array}\right\} \text{ für } i \in S_2$$

$$u^i(t) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & t = x,y \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} \text{ für } i \in S_3$$

Wähle $z \in A\backslash\{x,y\}$. Für $(s,t) \in g(i) :\Leftrightarrow u^i(s) > u^i(t)$ gilt nun:

- $(z,y) \in g(S_1)$ und $(y,z) \in g(S_1^C)$, also $(z,y) \in \sigma(g)$ (wegen $S_1 \in \mathcal{Q}_\sigma$).
- $(x,z) \in g(S_1 \cup S_3)$ und $(z,x) \in g(S_2)$, also $(x,z) \in \sigma(g)$ wegen $S_1 \cup S_3 \in \mathcal{Q}_\sigma$ weil $\mathcal{Q}_\sigma$ ein Filter ist.
- $(x,y) \in \sigma(g)$ wegen der Transitivität von $\sigma(g)$.
- $g = f$ auf $\{x,y\}$, also $(x,y) \in \sigma(f)$, was zu zeigen war. □

Bemerkung: Im Hinblick auf das obige Lemma nennt man $\mathcal{Q}_\sigma$ auch *das System der bei σ mächtigen Familien.*

6.12 Lemma (⊛). *Es gibt genau dann einen Diktator bzgl. σ, wenn $\mathcal{Q}_\sigma$ fixiert ist.*

Beweis. i_0 ist Diktator $\Leftrightarrow$ $\mathcal{Q}_\sigma = \{F \subset G : i_0 \in F\}$ (vgl. Definition und 6.11). □

Beweis von 6.7. Sei $\sigma \in \Sigma$. Dann ist $\mathcal{Q}_\sigma$ ein Ultrafilter auf einer endlichen Menge, der nach Lemma 3.14 fixiert ist; nach 6.12 gibt es einen Diktator. □

6.13 Lemma (⊛). *Für jeden Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf G wird eine SWF $\sigma_\mathcal{U} \in \Sigma$ mit $Q_{\sigma_\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ definiert durch*

$$(x,y) \in \sigma_\mathcal{U}(f) \quad :\Leftrightarrow \quad \{i \in G : (x,y) \in f(i)\} \in \mathcal{U}$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass es sich bei $\sigma_\mathcal{U}$ um eine SWF handelt:

Die Asymmetrie von $\sigma_\mathcal{U}(f)$ ist klar.

Für die neg. Transitivität nehmen wir an, dass für bestimmte x,y,f gilt:

$$(x,y) \notin \sigma_\mathcal{U}(f) \text{ und } (y,z) \notin \sigma_\mathcal{U}(f). \text{ D.h.}$$
$$U := \{i \in G : (x,y) \in f(i)\} \notin \mathcal{U} \quad \text{und} \quad V := \{i \in G : (y,z) \in f(i)\} \notin \mathcal{U}$$

Dann gilt $U^C, V^C \in \mathcal{U}$, also $(U \cup V)^C = U^C \cap V^C \in \mathcal{U}$; somit $W := U \cup V \notin \mathcal{U}$. Wir haben nun

$$(x,z) \in f(i) \underset{\text{neg. Transit.}}{\Rightarrow} (x,y) \in f(i) \vee (y,z) \in f(i) \quad \Rightarrow \quad i \in U \cup V = W$$

Somit $T := \{i : (x,z) \in f(i)\} \subset W$, also $T \notin \mathcal{U}$, d.h. $(x,z) \notin \sigma_\mathcal{U}(f)$.

Die Eigenschaften (P) und (U) sind offensichtlich.

Zu zeigen verbleibt $\mathcal{Q}_{\sigma_\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.

Sei $U \in \mathcal{U}$, sowie x,y,f mit $(x,y) \in f(U)$. Nun ist $T := \{i : (x,y) \in f(i)\} \supset U$, woraus $T \in \mathcal{U}$ folgt, da $\mathcal{U}$ ein (Ultra-)Filter ist. Somit gilt nach Definition $(x,y) \in \sigma_\mathcal{U}(f)$.

Nach Lemma 6.11 folgt $\mathcal{Q}_{\sigma_\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. □

Bemerkung (⊛): Die Abbildung $\sigma \mapsto \mathcal{Q}_\sigma$ ist im allgemeinen nicht injektiv: Betrachte drei Entscheidungsträger und zwei Alternativen x und y. Wenn der Diktator i_0 bezüglich dieser beiden Alternativen indifferent ist, hindert kein Axiom die beiden anderen bzw. das Kollektiv, für x zu entscheiden. Jedoch gilt $(x,y) \notin \sigma_{\mathcal{Q}_\sigma}(f)$, da die Menge der Befürworter von x keine Obermenge von $\{i_0\}$ ist.

Beweis von 6.8. Es gibt einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ in G, so dass für jede endliche Teilmenge H von G ihr Komplement H^C in $\mathcal{U}$ liegt (da der Filter $\{B \subset G : B^C \text{ endlich}\}$ in einem Ultrafilter enthalten ist (nach 3.13).

Sei σ die SWF aus Σ mit $\mathcal{Q}_\sigma = \mathcal{U}$, die Lemma 6.13 liefert.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass σ Eigenschaft (D) hat.

Da $\mathcal{U}$ keine endliche Menge enthält, ist $\mathcal{Q}_\sigma$ nach Lemma 3.14 nicht fixiert, und nach Lemma 6.12 gibt es keinen Diktator. □

Literatur zu Kapitel 6: [**Ar**], [**Ke**], [**Ro 2**]

7 Das Minimaxprinzip von Ky Fan

$z^0, \dots, z^r$ seien $r+1$ Punkte im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, die einen r-dimensionalen affinen Teilraum aufspannen. Wir definieren

$$S := \operatorname{conv}\{z^0, \dots, z^r\} = \left\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i z^i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 \right\}$$

die *konvexe Hülle* von $\{z^0, \dots, z^r\}$ oder das von $z^0, \dots, z^r$ *aufgespannte Simplex*. Die z^i heißen *Ecken* von S. Die *baryzentrischen Koordinaten* $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ des Punktes z sind eindeutig bestimmt. Für $\{z^{j_1}, \dots, z^{j_k}\} \subset \{z^0, \dots, z^r\}$ heißt $\operatorname{conv}\{z^{j_1}, \dots, z^{j_k}\}$ das von $z^{j_1}, \dots, z^{j_k}$ aufgespannte *Seitensimplex*. Für $z = \sum_{i=0}^r \lambda_i z^i$ heißt $\operatorname{conv}\{z^i : \lambda_i > 0\}$ der *Träger* von z. Eine Unterteilung von S in endlich viele Simplizes, so dass der Schnitt von je zwei entweder leer oder ein gemeinsames Seitensimplex ist, heißt *simpliziale Unterteilung* von S.

7.1 Lemma von Sperner

7.1 Lemma. *Ist Λ eine simpliziale Unterteilung von S und φ eine Abbildung, die jeder Ecke z eines Simplizes aus Λ eine Ecke $\varphi(z)$ des Trägers von z in S zuordnet, so existiert ein r-dim. Simplex $T = \operatorname{conv}\{\bar{z}^0, \dots, \bar{z}^r\}$ in Λ mit $\varphi(\{\bar{z}^0, \dots, \bar{z}^r\}) = \{z^0, \dots, z^r\}$.*

Beweis. Ein Simplex $T \in \Lambda$ heiße „lieb“, wenn es die geforderte Eigenschaft hat. Wir zeigen: Die Anzahl der lieben $T \in \Lambda$ ist ungerade (insbesondere ungleich 0).

Beweis mittels Induktion über r:

Der Induktionsanfang $r = 0$ ist klar.

Wir schließen von $r-1$ auf r: Die Behauptung gelte also für $(r-1)$-dimensionale Simplizes.

1. $T_1, T_2, \dots, T_\rho$ seien die r-dimensionalen Simplizes von Λ. Ein $(r-1)$-dimensionales Seitensimplex V von T_ν heiße „lieb“, wenn $\varphi(\text{Ecken von } V) = \{z^1, \dots, z^r\}$ ist.

   a_ν sei die Anzahl der lieben V's in T_ν.

   (a) *Ist T_ν lieb, so hat es genau ein liebes Seitensimplex V.* Denn sei $T_\nu = \operatorname{conv}\{b^0, \dots, b^r\}$ und gilt (oBdA) $\varphi(b^i) = z^i$ für alle i, so ist $V = \operatorname{conv}\{b^1, \dots, b^r\}$ die einzige liebe Seite.

   (b) *Ist T_ν nicht lieb, so hat T_ν keine oder genau zwei liebe Seiten.*
   Denn sei $V = \operatorname{conv}\{b^1, \dots, b^r\}$ eine liebe Seite. Wieder nehmen wir oBdA an, dass $\varphi(b^i) = z^i$ für alle $i > 0$ gilt. Da T_ν nicht lieb ist, gilt $\varphi(b^0) = z^j$ mit $j \neq 0$. Dann ist $V' := \operatorname{conv}(\{b^0, \dots, b^r\} \backslash \{b^j\})$ lieb (und kein anderes Seitensimplex kann lieb sein). Somit gilt:
   $$\sum_\nu a_\nu = \sum_{\nu : T_\nu \text{ lieb}} \underbrace{a_\nu}_{1} + \sum_{\nu : T_\nu \text{ nicht lieb}} \underbrace{a_\nu}_{0 \text{ oder } 2}$$

   Es genügt also zu zeigen: $\sum_\nu a_\nu$ ist ungerade.

2. Sei V eine liebe Seite. Es gibt zwei Fälle:

   (a) V liegt im Inneren von S. Dann ist V Seitensimplex von 2 T_νs, und V wird in der obigen Summe zweimal gezählt.

   (b) V liegt am Rand von S, insbesondere auf einem $(r-1)$-dimensionalen Seitensimplex U von S. In diesem Fall ist V Seitensimplex von genau einem T_ν, wird also in der obigen Summe einfach gezählt.

   Für jede Ecke z von V muss $\varphi(z)$ Ecke von U sein (aufgrund der Definition von φ). Also gilt $U = \operatorname{conv}\{z^1, \dots, z^r\}$, und dieses U ist universal für alle V aus Fall (b).

   Durch Λ wird auf U eine simpliziale Zerlegung Λ' der in U liegenden Seitensimplizes definiert.

   Die lieben Seiten V auf U sind genau die lieben T' in Λ'. Die Behauptung folgt nun aus der Induktionsvoraussetzung. □

7.2 Satz von Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz

7.2 Satz (KKM-Theorem). $S = \operatorname{conv}\{z^0, \dots, z^r\}$ *sei ein r-dimensionales Simplex im euklidischen Raum. $C_0, \dots, C_r$ seien abgeschlossene Teilmengen von S mit der Eigenschaft*

$$\emptyset \neq J \subset \{0, \dots, r\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{conv}\{z^j : j \in J\} \subset \bigcup_{j \in J} C_j$$

Dann ist $\bigcap_{i=0}^r C_i \neq \emptyset$.

Beweis. Es existiert eine Folge simplizialer Unterteilungen Λ_n von S derart, dass der maximale Durchmesser der T_ν aus Λ_n gegen Null geht (für $n \to \infty$).

Definiere φ_n auf $\{z : z \text{ Ecke in } \Lambda_n\}$ wie folgt:

Für die Ecke z sei $\text{Träger}(z) = \operatorname{conv}\{z^{j_1}, \dots, z^{j_s}\}$. Nach Voraussetzung gilt: $\text{Träger}(z) \subset \bigcup_{k=1}^s C_{j_k}$.

Wähle j_k mit $z \in C_{j_k}$ und setze $\varphi_n(z) = z^{j_k}$.

Nach dem Lemma von Sperner gibt es T_n aus Λ_n, so dass $T_n = \operatorname{conv}\{z^{0^{(n)}}, \dots, z^{r^{(n)}}\}$ sowie

$$\varphi_n(\{z^{0^{(n)}}, \dots, z^{r^{(n)}}\} = \{z^0, \dots, z^r\}$$

Sei nun oBdA $\varphi_n(z^{i^{(n)}}) = z^i$, also $z^{i^{(n)}} \in C_i$ für alle i.

Da S kompakt ist, gibt es (für alle i) eine konvergente Teilfolge $z^{i^{(n_k)}}$. Der Grenzwert sei z^{i*}. Es gilt $z^{i^{(n_k)}} \in C_i$. Da C_i abgeschlossen ist folgt $z^{i*} \in C_i$. Der Durchmesser von $\operatorname{conv}\{z^{0^{(n)}}, \dots, z^{r^{(n)}}\}$ geht gegen 0, also muss $z^{0*} = z^{1*} = \dots = z^{r*}$ gelten, mithin $z^{0*} \in \bigcap_{i=0}^n C_i$. □

Das Ergebnis des vorigen Satzes kann man verallgemeinern:

7.3 Satz von Ky Fan

7.3 Satz. *Seien X, Z Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ und X kompakt. Zu jedem $z \in Z$ sei eine abgeschlossene Teilmenge $F(z) \subset X$ gegeben mit*

$$\operatorname{conv}\{z^1, \ldots, z^n\} \subset F(z^1) \cup \cdots \cup F(z^n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, z^1, \ldots, z^n \in Z$$

Dann ist $\bigcap_{z \in Z} F(z) \neq \emptyset$.

Beweis. Aufgrund der Heine-Borel Eigenschaft genügt es zu zeigen, dass der Schnitt von endlich vielen $F(z^1), \ldots, F(z^n)$ nicht leer ist (dann können die Komplemente der $F(z)$ keine offene Überlagerung des Kompaktums X liefern).

Betrachten wir also endlich viele $z_1, \ldots, z_n \in Z$.
Wir definieren $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{R}^k$ durch $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$. Dann definieren wir

$$C_i := f^{-1}(F(z_i))$$

Diese Mengen sind abgeschlossen, da f stetig ist. Wir wollen den vorigen Satz anwenden. Also müssen wir die Voraussetzung überprüfen. Sei also $\emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, n\}$. Wir wollen zeigen, dass $\operatorname{conv}\{e^j : j \in J\} \subset \bigcup_{j \in J} C_j$ gilt.

Sei also $t = \sum_{j \in J} \lambda_j e^j$. Dann ist

$$f(t) = \sum_{j \in J} \lambda_j z_j \in \operatorname{conv}\{z_j : j \in J\} \subset \bigcup_{j \in J} F(z_j)$$

(die letzte Inklusion gilt nach Voraussetzung), und wir schließen

$$t \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} F(z_j)\right) = \bigcup_{j \in J} C_j$$

Also können wir das KKM-Theorem anwenden und erhalten die Existenz eines $t^* \in \bigcap_{i=1}^n C_i$. Somit gilt $f(t^*) \in \bigcap_{i=1}^n (F(z_i))$, was den Beweis vollendet. □

7.4 Ky Fansches Minimaxprinzip

7.4 Satz. *Sei X eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ und $f : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:*

a) $f(x, \cdot)$ ist uhs für alle $x \in X$.

b) $f(\cdot, y)$ ist quasikonkav für alle $y \in X$.

Dann gilt $\min_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x, y) \leqq \sup_{x \in X} f(x, x)$.

Bemerkung (⊛):
Insbesondere gibt es nach dem Minimaxprinzip ein y_0 mit $\sup_{x \in X} f(x, y_0) \leqq \sup_{x \in X} f(x, x)$.

Beweis. Nach Lemma 5.3.d ist $\sup_{x \in X} f(x, \cdot)$ uhs.
Dann existiert nach 5.2 das Minimum $\min_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x, y)$.

Sei $\mu := \sup_{x \in X} f(x, x)$. Wir nehmen $\mu \in \mathbb{R}$ an, andernfalls sind wir fertig (denn $\mu > -\infty$ gilt trivialerweise).

$F(x) := \{y \in X : f(x, y) \leqq \mu\}$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung. Wir behaupten, dass

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$$

Nach dem Satz von Ky Fan genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^n\} \subset \bigcup_{i=1}^n F(x^i)$ für alle $x^i \in X$, $i \leqq n \in \mathbb{N}$.

Nehmen wir an, es gäbe $z^1, \ldots, z^n$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{P}^n$ mit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i z^i \notin \bigcup_{i=1}^n F(z^i)$$

Dann folgt $f(z^i, \sum_{i=1}^n \alpha_i z^i) > \mu$ für alle $i \leqq n$.

Da f quasikonkav ist, folgt $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i z^i, \sum_{i=1}^n \alpha_i z^i) > \mu$, ein Widerspruch.

Nach dem Satz von Ky Fan gibt es ein $y_0 \in \bigcap_{x \in X} F(x)$, also $f(x, y_0) \leqq \mu$ für alle $x \in X$.

Nun folgt

$$\min_{y \in X} \sup_{x \in X} f(x, y) \leqq \sup_{x \in X} f(x, y_0) \leqq \mu$$ □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun den Beweis des Hauptsatzes der Spieltheorie (Lemma 2.3) nachholen.

Beweis des Hauptsatzes der Spieltheorie

Satz: *Zu jeder $(m \times n)$-Matrix G existiert ein $\bar{p} \in \mathbb{P}^m$ und ein $\bar{q} \in \mathbb{P}^n$, so dass gilt:*

$$p^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G q \qquad \forall p \in \mathbb{P}^m,\ q \in \mathbb{P}^n$$

Beweis. Wir definieren

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \times (\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) &\to \mathbb{R} \\ ((p, q), (\tilde{p}, \tilde{q})) &\mapsto p^t G \tilde{q} - \tilde{p}^t G q \end{aligned}$$

Es gilt $f((p, q), (p, q)) = 0$ für alle p, q. Ferner ist f stetig (insbesondere im zweiten Argument), sowie affin linear im ersten Argument, also quasikonkav im ersten Argument.

Aus dem Ky Fanschen Minimaxprinzip erhalten wir die Existenz eines $(\bar{p}, \bar{q})$, für das gilt:

$$\sup_{(p,q)} f((p, q), (\bar{p}, \bar{q})) \leqq \sup_{(p,q)} f((p, q), (p, q)) = 0$$

Wir haben also

$$0 \geqq f((p, q), (\bar{p}, \bar{q})) = p^t G \bar{q} - \bar{p}^t G q$$

Hieraus können wir mit $q = \bar{q}$ bzw. $p = \bar{p}$ auf

$$p^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G \bar{q} \leqq \bar{p}^t G q$$

schließen. □

Wir können jetzt auch den Satz von Sloss (3.10) wie folgt variieren:

7.5 Satz (Ky Fan-Sonnenschein). *Sei X eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\succeq$ eine binäre Relation auf X derart, dass für die zugehörige strikte Relation $\succ$ gilt:*

i) $x \notin \operatorname{conv}(O(\succ, x))$ *für alle* $x \in X$.

ii) Für alle $y \in U(\succ, x)$ *gibt es ein* $z \in X$ *so, dass* y *ein innerer Punkt von* $U(\succ, z)$ *ist.*

Dann ist $\max(X, \succeq)$ *abgeschlossen und nicht leer.*

Beweis. 1. Sei $U^0(\succ, z)$ die Menge der inneren Punkte von $U(\succ, z)$.

$$\max(X, \succeq) \underset{(1)}{=} \bigcap_{x \in X} (U(\succ, x))^C \underset{(2)}{=} \underbrace{\bigcap_{x \in X} \underbrace{(U^0(\succ, x))^C}_{\text{abgeschlossen}}}_{\text{abgeschlossen}}$$

Diese Aussage müssen wir rechtfertigen:

„mitte“ $\subset$ „rechts“ ist klar. Zu (1):

$$y \in \max(X, \succeq) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X : x \not\succ y \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X : y \notin U(\succ, x)$$

Zu „rechts“ $\subset$ „mitte“: Sei $y \notin \bigcap_{x \in X} (U(\succ, x))^C$. Dann gibt es ein x_0 mit $y \in U(\succ, x_0)$; nach Voraussetzung (ii) gibt es dann auch ein z mit $y \in U^0(\succ, z)$, d.h. $y \notin \bigcap_{x \in X} (U^0(\succ, x))^C$.

2. Es verbleibt zu zeigen, dass die Menge der maximalen Elemente nicht leer ist. Sei dazu

$$F(x) := (U^0(\succ, x))^C$$

Diese Menge ist für alle $x \in X$ abgeschlossen. Sei

$$y \in \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^m\}$$

Angenommen, $y \notin \bigcup_{i=1}^m F(x^i)$. Dann ist

$$y \in \bigcap_{i=1}^m U^0(\succ, x^i) \subset \bigcap_{i=1}^m U(\succ, x^i)$$

also insbesondere $y \prec x^i$ für alle i; anders formuliert: $x^i \in O(\succ, y)$ für alle i. Dann ist $y \in \operatorname{conv}(O(\succ, y))$, im Widerspruch zur Annahme (i).

Damit sind die Voraussetzungen für den Satz von Ky Fan erfüllt, was den Beweis beendet. □

7.6 Bemerkung. a) Ist $\succeq$ eine schwach konvexe Präferenzordnung auf X, so gilt 7.5.i (nach Satz 3.9).

b) Ist jedes $U(\succ, x)$ offen, so gilt 7.5.ii.

Literatur zu Kapitel 7: [**Au**], [**Ich**]

8 Korrespondenzen

Seien X und Y nichtleere Mengen.
Eine *Korrespondenz* von X nach Y ist eine Abbildung: $\Phi : X \to 2^Y = \mathcal{P}(Y)$. Wir bezeichnen

$$Gr\,\Phi := \{(x,y) : y \in \Phi(x), x \in X\}$$

als den *Graph* von Φ.

Ferner sei für $B \subset Y$

$$\Phi^+(B) := \{x \in X : \Phi(x) \subset B\}$$
$$\Phi^-(B) := \{x \in X : \Phi(x) \cap B \neq \emptyset\}$$

Die Abbildungen Φ^+ bzw. Φ^- heissen *obere bzw. untere Inverse von* Φ.

Im Folgenden seien X und Y topologische Räume. Wir betrachten Korrespondenzen Φ von X nach Y mit gewissen Stetigkeitseigenschaften.

8.1 Definition. Die Korrespondenz $\Phi : X \to 2^Y$ heißt

a) *nach oben halbstetig (ohs)* an der Stelle $\bar{x}$, wenn zu jeder Umgebung G von $\Phi(\bar{x})$ eine Umgebung U von $\bar{x}$ existiert mit $\Phi(x) \subset G$ für alle $x \in U$.

b) *nach unten halbstetig (uhs)* an der Stelle $\bar{x}$,
wenn es zu jeder offenen Menge $G \subset Y$ mit $\Phi(\bar{x}) \cap G \neq \emptyset$ eine Umgebung U von $\bar{x}$ gibt, so dass $\Phi(x) \cap G \neq \emptyset$ für alle $x \in U$.

Φ heißt *ohs (uhs)*, wenn es überall ohs (uhs) ist. Φ heißt *stetig*, wenn es ohs und uhs ist.

Interpretation: Φ ist ohs (uhs) in $\bar{x}$, wenn $\Phi(x)$ nicht „explodiert" (bzw. „implodiert") bei $x = \bar{x}$.

Beispiel: Definiere $\Phi(x) := \begin{cases} [-2,2] & \text{für } x < 0 \\ [-1,1] & \text{für } 0 \leqq x \leqq 2 \\ \{0\} & \text{für } x > 0 \end{cases}$

Dann ist Φ uhs aber nicht ohs an $x = 0$, und ohs aber nicht uhs an der Stelle $x = 2$.

Wer mag, kann hier eine Skizze einzeichnen.

8.2 Lemma. *Sei Φ eine Korrespondenz von X nach Y.*

a) Es sind äquivalent:

i) Φ ist ohs.
ii) Für jedes offene $G \subset Y$ ist $\Phi^+(G)$ offen.
iii) Für jedes abgeschlossene $F \subset Y$ ist $\Phi^-(F)$ abgeschlossen.

b) Es sind äquivalent:

i) Φ ist uhs.
ii) Für jedes offene $G \subset Y$ ist $\Phi^-(G)$ offen.
iii) Für jedes abgeschlossene $F \subset Y$ ist $\Phi^+(F)$ abgeschlossen.

Beweis. a) $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ folgt aus $(\Phi^+(G))^C = \Phi^-(G^C)$.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$: Das folgt unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen.

b) analog. □

Bemerkung: Jede Abbildung $\varphi : X \to Y$ definiert durch $\Phi_\varphi(x) := \{\varphi(x)\}$ eine Korrespondenz. Dann gilt

$$\Phi_\varphi \text{ ohs} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_\varphi \text{ uhs} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ stetig}$$

denn $\Phi^+_\Phi(G) = \Phi^-_\varphi(G) = \varphi^{-1}(G)$.

Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum heißt *regulär (oder T3),* wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $F \subset X$ mit $x \notin F$ offene Mengen U und G gibt mit

$$x \in U, \quad F \subset G, \quad U \cap G = \emptyset$$

Insbesondere ist jeder metrische Raum sowie jeder kompakte Hausdorffraum regulär (genau genommen sind diese beiden Klassen von Räumen sogar *normal (oder T4),* d.h. sie haben die stärkere Trennungseigenschaft, dass man zwei abgeschlossene Mengen durch offene trennen kann)[9].

8.3 Lemma. *Seien X ein beliebiger und Y ein regulärer topologischer Raum, sowie Φ eine Korrespondenz von X nach Y. Ist Φ ohs und sind alle $\Phi(x)$, $x \in X$ abgeschlossen, so ist $Gr\,\Phi$ abgeschlossen (in der Produkttopologie).*

Beweis. Wir zeigen, dass $(Gr\,\Phi)^C$ offen ist. Sei $(\bar{x},\bar{y}) \in (X \times Y)\setminus Gr\,\Phi$; d.h. $\bar{y} \notin \Phi(\bar{x})$. Da $\Phi(\bar{x})$ abgeschlossen und Y regulär ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen U von $\bar{y}$ und G von $\Phi(\bar{x})$. Da Φ ohs ist, gibt es eine offene Umgebung V von $\bar{x}$ mit $\Phi(V) \subset G$. Nun gilt für alle $v \in V$: $\Phi(v) \cap U = \emptyset$. Also $(\bar{x},\bar{y}) \in V \times U \subset (Gr\,\Phi)^C$. □

Die Umkehrung dieses Lemmas gilt im allgemeinen nicht:

8.4 Beispiel. $X = Y = \mathbb{R}_+$ mit $\Phi(x) = \{\varphi(x)\}$ sowie $\varphi(x) = 1/x$ für positive x, und $\varphi(0) = 0$. Hier ist $Gr\,\Phi$ abgeschlossen, alle $\Phi(x)$ sind abgeschlossen, aber Φ ist nicht ohs, da φ bei 0 unstetig ist. ◊

[9] Der Vollständigkeit halber: T2 ist Hausdorff;
T1: Man kann zu zwei Punkten um jeden der beiden eine offene Menge finden, die den anderen nicht enthält, und
T0: Von zwei Punkten hat einer eine Umgebung die den anderen nicht enthält.

8.5 Lemma. *Seien X und Y topologische Räume und Φ_i seien zwei Korrespondenzen von X nach Y (für $i = 1, 2$). Sei $\Phi(x) := \Phi_1(x) \cap \Phi_2(x)$.*
Ist $Gr\,\Phi_1$ abgeschlossen, Φ_2 ohs und $\Phi_2(x)$ abgeschlossen und kompakt (für alle x), so ist Φ ohs.

Beweis. Sei $\bar{x} \in X$ und G eine Umgebung von $\Phi(\bar{x})$.
Fall 1: $\Phi_2(\bar{x}) \subset G$. Da Φ_2 ohs ist, gibt es eine Umgebung U von $\bar{x}$, so dass $\Phi_2(U) \subset G$ gilt. Insbesondere folgt $\Phi(x) \subset \Phi_2(x) \subset G$ für alle $x \in U$. Somit ist Φ ohs in $\bar{x}$.
Fall 2: Es gibt ein $y \in \Phi_2(\bar{x}) \backslash G$.
Dann ist $y \notin \Phi_1(\bar{x})$, und $(\bar{x}, y) \in (Gr\,\Phi_1)^C$ (offen). Also gibt es für alle $y \in \Phi_2(\bar{x}) \backslash G$ eine offene Umgebung U_y von $\bar{x}$ und V_y von y mit $U_y \times V_y \subset (Gr\,\Phi_1)^C$.
Für alle $x \in U_y$ gilt $\Phi_1(x) \cap V_y = \emptyset$ $(*)$. Des weiteren ist

$$\underbrace{\Phi_2(\bar{x}) \backslash G}_{\text{kompakt}} \subset \bigcup \underbrace{\{V_y : y \in \Phi_2(\bar{x}) \backslash G\}}_{\text{offene Überdeckung}}$$

Also gibt es endlich viele $y^1, \ldots, y^n$, so dass $V := V_{y^1} \cup \cdots \cup V_{y^n} \supset \Phi_2(\bar{x}) \backslash G$, also $\Phi_2(\bar{x}) \subset G \cup V$.
Da Φ_2 ohs ist, gibt es eine offene Umgebung W von $\bar{x}$ mit $\Phi_2(W) \subset G \cup V$.
Setze $U := U_{y^1} \cap \cdots \cap U_{y^n}$. Dann ist U eine offene Umgebung von $\bar{x}$ und $(*)$ impliziert

$$\Phi_1(x) \cap V = \emptyset \qquad \forall x \in U$$

Für $x \in U \cap W$ gilt: $\Phi_1(x) \cap V = \emptyset$ und $\Phi_2(x) \subset G \cup V$.
Also gilt für diese x-Werte: $\Phi(x) \subset G$ und Φ ist ohs in $\bar{x}$. □

8.6 Satz („Umkehrung von 8.3“ ⊛). *Seien X und Y topologische Räume, sowie Φ eine Korrespondenz von X nach Y mit abgeschlossenem Graphen. Dann ist jedes $\Phi(x)$ abgeschlossen. Ist Y kompakt, so ist Φ ohs.*

Beweis. 1. Sei $\bar{x} \in X$. Zu jedem $\bar{y} \notin \Phi(\bar{x})$, d.h. $(\bar{x}, \bar{y}) \notin Gr\,\Phi$ gibt es eine offene Umgebung $U \times V$ von $(\bar{x}, \bar{y})$ mit $U \times V \subset (Gr\,\Phi)^C$ (da $Gr\,\Phi$ abgeschlossen ist). Insbesondere gilt $y \notin \Phi(\bar{x})$ für alle $y \in V$. Somit ist $\Phi(\bar{x})^C$ offen, was zu zeigen war.

2. Setze $\Phi_1 := \Phi$ (hat abgeschlossenen Graphen) und $\Phi_2(x) := Y$ für alle $x \in X$. Dann ist Φ_2 ohs, $\Phi_2(x)$ ist abgeschlossen und kompakt für alle x. Nach Lemma 8.5 ist $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$ ohs. □

8.7 Lemma (⊛). *Seien X, Y topologische Räume und $A \subset X, B \subset Y$ kompakte Teilmengen.*
$G \subset X \times Y$ sei eine offene Teilmenge in der Produkttopologie.
Gilt $A \times B \subset G$, so gibt es offene Mengen $U \subset X, V \subset Y$ mit $A \times B \subset U \times V \subset G$.

Beweis. Die Menge der „offenen Rechtecke“ $\mathcal{R} := \{U \times V : U \subset X \text{ offen}, V \subset Y \text{ offen}\}$ bildet eine Basis für die Produkttopologie.
1. Schritt: Die Aussage gilt für $A = \{a_0\}$.
Für jeden Punkt $(a_0, b) \in \{a_0\} \times B$ gibt es offene Umgebungen U_b von a_0 und V_b von b mit $U_b \times V_b \subset G$. Da B kompakt ist, reichen endlich viele dieser Mengen aus, um $\{a_0\} \times B$ zu überdecken, d.h.

$$\{a_0\} \times B \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{b^i} \times V_{b^i}) \subset G$$

und

$$\{a_0\} \times B \subset \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b^i} \right)}_{=:U} \times \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b^i} \right)}_{=:V} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{b^i} \times V_{b^i}) \subset G$$

2. Schritt: Die Aussage gilt für allgemeines A.
Für jedes $a \in A$ finden wir nach Schritt 1 eine offene Umgebung U_a von a und eine offene Umgebung V_a von B mit $\{a\} \times B \subset U_a \times V_a \subset G$. Da A kompakt ist, reichen endliche viele der Mengen U_a aus, um A zu überdecken. Dann gilt:

$$A \times B \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(U_{a^j} \times \underbrace{V_{a^j}}_{\supset B} \right) \subset G$$

$$A \times B \subset \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{b^i} \right)}_{=:U} \times \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{m} V_{b^i} \right)}_{=:V} \subset \bigcup_{j=1}^{m} (U_{a^j} \times V_{a^j}) \subset G$$

Somit leistet $U \times V$ das Gewünschte. □

8.8 Lemma. *Für $i \in \{1, \ldots, h\}$ seien X und Y^i topologische Räume und Φ^i seien ohs Korrespondenzen von X nach Y^i.*

Für jedes x und i sei $\Phi^i(x)$ nichtleer und kompakt.

Dann ist die „Produktkorrespondenz“ $\Phi = \Phi^1 \times \cdots \times \Phi^h$ ohs.

Beweis. Es ist klar, dass wir oBdA $h = 2$ annehmen können (Induktionsargument).

Sei $x \in X$ und G eine offene Umgebung von $\Phi^1(x) \times \Phi^2(x)$. Nach 8.7 gibt es offene Mengen $G_i \supset \Phi^i(x)$ $(i \in \{1, 2\})$ mit $G_1 \times G_2 \subset G$. Da Φ^i ohs ist gibt es offene Umgebungen U_i von x mit $\Phi^i(U_i) \subset G_i$. Also ist

$$\Phi^1(x) \times \Phi^2(x) \subset G_1 \times G_2 \subset G \qquad \text{für alle } x \in U_1 \cap U_2$$ □

8.9 Satz. *Seien X und Y topologische Räume, $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ uhs und Φ eine uhs Korrespondenz von X nach Y mit $\Phi(x) \neq \emptyset$ für alle x.*

Dann ist $\alpha(x) := \sup_{y \in \Phi(x)} f(x, y)$ uhs.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ die Menge

$$T = T_\gamma := \{x \in X : \alpha(x) > \gamma\}$$

offen ist. Sei $x_0 \in T$. Wegen $\alpha(x_0) > \gamma$ existiert ein $y_0 \in \Phi(x_0)$ mit $f(x_0, y_0) > \gamma$. Da f uhs ist, existieren Umgebungen U von x_0 und V von y_0 mit $f(x, y) > \gamma$ für alle $(x, y) \in U \times V$ $(*)$.

Wegen $y_0 \in \Phi(x_0) \cap V$ folgt aus der Unterhalbstetigkeit von Φ die Existenz einer Umgebung W von x_0 mit $\Phi(x) \cap V \neq \emptyset$ für $x \in W$.

Für $x \in U \cap W$ existiert ein $y \in \Phi(x) \cap V$; nach $(*)$ gilt: $\alpha(x) \geqq f(x, y) > \gamma$. Insbesondere ist die Umgebung $U \cap W$ von x_0 eine Teilmenge von T_γ. □

8.10 Satz. *Seien X und Y topologische Räume, $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ ohs und Φ eine ohs Korrespondenz von X nach Y mit $\Phi(x)$ kompakt und nicht leer für alle x.*

Dann ist $\alpha(x) := \sup_{y\in\Phi(x)} f(x,y)$ ohs.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ die Menge

$$S = S_\gamma := \{x \in X : \alpha(x) < \gamma\}$$

offen ist. Sei $x_0 \in S$. Wähle $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha(x_0) < \delta < \gamma$. Für $y \in \Phi(x_0)$ gilt $f(x_0, y) < \delta$. Da f ohs ist, existieren offene Umgebungen U_y von x_0 und V_y von y, so dass $f(x,z) < \delta$ für alle $(x,z) \in U_y \times V_y$ gilt.

Da $\Phi(x_0)$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $V_{y^1}, \ldots, V_{y^n}$; d.h.

$$\Phi(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y^i} =: V$$

Da Φ ohs ist, existiert eine Umgebung U von x_0 mit $\Phi(x) \subset V$ für alle $x \in U$.

Betrachte die Umgebung $W := U \cap \bigcap_{i=1}^n U_{y^i}$ von x_0. Für $x \in W$ gilt:

$$\begin{aligned} y \in \Phi(x) \quad &\Rightarrow \quad y \in V \\ &\Rightarrow \quad y \in V_{y^i} \text{ für ein } i \\ &\Rightarrow \quad (x,y) \in U_{y^i} \times V_{y^i} \text{ für dieses } i \\ &\Rightarrow \quad f(x,y) < \delta \end{aligned}$$

Somit gilt $\alpha(x) \leqq \delta < \gamma$, also $W \subset S$. □

8.11 Maximumsatz von Berge

8.11 Satz. *Seien X, Y topologische Räume, und $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ stetig. Ferner sei Φ eine stetige Korrespondenz von X nach Y mit $\Phi(x)$ abgeschlossen, kompakt und nicht leer für alle x. Sei*

$$\begin{aligned} \alpha(x) &:= \sup_{y\in\Phi(x)} f(x,y) \\ \mathcal{M}(x) &:= \{y \in \Phi(x) : f(x,y) = \alpha(x)\} \end{aligned}$$

Dann ist α stetig und $\mathcal{M}$ ist eine ohs Korrespondenz von X nach Y.

Beweis. Die Stetigkeit von α folgt aus den beiden vorangegangenen Sätzen.

Wenn wir

$$\Psi(x) := \{y \in Y : f(x,y) - \alpha(x) \geqq 0\}$$

definieren, so ist $\mathcal{M} = \Psi \cap \Phi$. Der Graph

$$Gr\,\Psi = \{(x,y) : f(x,y) - \alpha(x) \geqq 0\}$$

ist abgeschlossen, da f und α stetig sind. Nun folgt die Behauptung aus 8.5. □

8.12 Satz. *Sei X eine kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften*

a) $f(x,\cdot)$ ist uhs für alle x.

b) $f(\cdot,y)$ ist konkav für alle y.

Ferner sei Φ eine Korrespondenz von X nach X derart, dass gilt:

c) $\Phi(x)$ ist nicht leer, abgeschlossen und konvex für alle x.

d) $\alpha(y) := \sup_{x\in\Phi(y)} f(x,y)$ ist uhs (mit $y \in X$).

e) $\beta_r(y) := \sup_{x\in\Phi(y)} r^t x$ ist ohs für alle $r \in \mathbb{R}^n$ (mit $y \in X$).

Dann existiert ein $y \in X$ mit

i) $y \in \Phi(y)$; Ein solches y heißt **Fixpunkt** *von Φ.*

ii) $\alpha(y) = \sup_{x\in\Phi(y)} f(x,y) \leqq \sup_{z\in X} f(z,z)$.

Beweis. Setze $\mu := \sup_{z\in X} f(z,z)$.

1. Fall: $\mu = 0$. Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch:
Dann gilt für alle y entweder $y \notin \Phi(y)$ (α) oder $\alpha(y) > 0$ (β).

Im Falle (α) gibt es nach dem Trennungssatzes 4.7 ein $r \in \mathbb{R}^n$ mit

$$r^t y > \max_{x\in\Phi(y)} r^t x = \sup_{x\in\Phi(y)} r^t x = \beta_r(y)$$

und wir haben

$$X = \underbrace{\{y \in X : \alpha(y) > 0\}}_{\text{offen, da } \alpha \text{ uhs}} \cup \bigcup_{r\in\mathbb{R}^n} \underbrace{\{y \in X : \beta_r(y) - r^t y < 0\}}_{\text{offen, da } \beta_r \text{ ohs}}$$

Da X kompakt ist, gibt es $r^1, \ldots, r^n \in \mathbb{R}^n$, so dass $X = \bigcup_{i=0}^n U_i \quad (*)$, mit

$$\begin{aligned} U_0 &:= \{\alpha > 0\} \\ U_i &:= \{y \in X : \beta_{r^i}(y) < (r^i)^t y\} \qquad 1 \leqq i \leqq n \end{aligned}$$

Setze für $x, y \in X$

$$\varphi(x,y) := d(y, U_0^C) f(x,y) + \sum_{i=1}^{n} d(y, U_i^C)(r^i)^t(y-x)$$

Hier ist $d(y,F) = \inf_{z\in F} d(y,z)$. Wegen $|d(x,F) - d(y,F)| \leqq d(x,y)$ ist $d(\cdot,F)$ stetig.

Wir haben $\mu = 0$, d.h. $f(x,x) \leqq 0$ für alle x, woraus wir $\varphi(x,x) \leqq 0$ schließen. Da $f(x,\cdot)$ uhs ist, erhalten wir aus 5.3 (Abgeschlossenheit der uhs-Funktionen unter Addition), dass $\varphi(x,\cdot)$ uhs ist.

Ebenso schließen wir aus $f(\cdot,y)$ konkav (mit 5.5), dass $\varphi(\cdot,y)$ konkav ist (beachte hierbei: die rechte Summe ist linear in x, also konkav), und somit quasikonkav ist.

Nun folgt mit dem Ky Fanschen Minimaxprinzip (7.4), dass ein $\bar{y} \in X$ existiert, so dass für alle $x \in X$

$$\varphi(x, \bar{y}) \leqq \sup_{z \in X} \varphi(z, z) \leqq 0$$

gilt. Wir wollen hierzu einen Widerspruch konstruieren. Sei $\bar{x} \in \Phi(\bar{y})$ beliebig, falls $\alpha(\bar{y}) \leqq 0$ ist, und $\bar{x} \in \Phi(\bar{y})$ mit $f(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, falls $\alpha(\bar{y}) > 0$ ist.

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\bar{y}, U_0^C) > 0 &\Leftrightarrow \bar{y} \notin U_0^C \\ &\Leftrightarrow \bar{y} \in U_0 \\ &\Leftrightarrow \alpha(\bar{y}) > 0 \\ &\Rightarrow d(\bar{y}, U_0^C) f(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \\ d(\bar{y}, U_i^C) > 0 &\Leftrightarrow \bar{y} \in U_i \\ &\Rightarrow (r^i)^t \bar{y} > \beta_{r^i}(\bar{y}) = \sup_{x \in \Phi(\bar{y})} (r^i)^t x \geqq (r^i)^t \bar{x} \qquad 1 \leqq i \leqq n \end{aligned}$$

Somit ist nach $(*)$ einer der Summanden in $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ positiv, (die nicht-positiven sind Null), also $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) > 0$.

2. Fall: $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wende den 1. Fall auf $\bar{f}(x, y) := f(x, y) - \mu$.

3. Fall: $\mu = \infty$. Wähle ein y mit $y \in \Phi(y)$. Ein solches existiert nach dem 1. Fall mit $f \equiv 0$. □

8.13 Fixpunktsatz von Kakutani

8.13 Korollar. *Sei X eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^k$, und Φ eine Korrespondenz von X nach X derart, dass gilt:*

a) $\Phi(x)$ ist nicht leer, abgeschlossen und konvex für alle x.

b) $\beta_r(y) := \sup_{x \in \Phi(y)} r^t x$ ist ohs für alle $r \in \mathbb{R}^k$ (mit $y \in X$).

Dann hat Φ einen Fixpunkt.

Beweis. Setze $f \equiv 0$ im vorigen Satz. □

8.14 Bemerkung. Das obige Korollar bleibt richtig, wenn man die Bedingung (b) ersetzt durch:

$b')$ $Gr\,\Phi$ ist abgeschlossen.

oder durch

$b'')$ Φ ist ohs.

Beweis. $(b'') \Rightarrow (b)$ folgt aus 8.10.

$(b') \Leftrightarrow (b'')$ folgt aus 8.6 und 8.3 (man beachte, dass wir hierbei (a) voraussetzen). □

8.15 Fixpunktsatz von Brouwer

8.15 Satz. *Sei X eine konvexe, kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ und $\varphi : X \to X$ stetig. Dann hat φ einen Fixpunkt.*

Beweis. Man wende den Fixpunktsatz von Kakutani auf $\Phi(x) := \{\varphi(x)\}$ an. ($\beta_r(y) = r^t\varphi(y)$ ist stetig.) □

8.16 Definition. Eine *abstrakte Ökonomie* ist ein Tupel $\mathcal{A} = (S^l, \Psi^l, v^l)_{l=1}^h$.
Hierbei sind die S^l nichtleere Mengen (Strategiemenge des Akteurs l), Ψ^l ist eine Korrespondenz von $S := \prod_{l=1}^h S^l$ nach S^l (in der Situation s ist $\Psi^l(s)$ die Menge der erlaubten Strategien des Akteurs l), und $v^l : Gr(\Psi^l) \to \mathbb{R}$ ist die Nutzenfunktion („utility") des Akteurs l.

Ein h-Tupel $s^* = (s^{1*}, \ldots, s^{h*}) \in S$ heißt *soziales Gleichgewicht*, wenn für alle l gilt:

(SG1) $s^{l*} \in \Psi^l(s^*)$ („s^* ist zulässig.")

(SG2) $v^l(s^*, s^{l*}) \geqq v^l(s^*, s^l)$ für alle $s^l \in \Psi^l(s^*)$. („Es gibt keine bessere zulässige Strategie.")

Bemerkung: Meist ist die Menge aller zulässigen Aktionentupel $Z \subset S$ vorgegeben und es ist:

$$\Psi^l(s) = \{z^l \in S^l : (s^1, \ldots, s^{l-1}, z^l, s^{l+1}, \ldots, s^h) \in Z\}$$

Das heißt: z^l muss zu den anderen Aktionen s^i „passen".

Der Begriff der abstrakten Ökonomie ist in dieser Allgemeinheit nur schwer „praktisch" interpretierbar. Er ist aber als mathematisches Werkzeug zum Beweis von Existenzsätzen nützlich.

8.17 Satz von Arrow-Debreu-Nash

8.17 Satz. *Sei $\mathcal{A} = (S^l, \Psi^l, v^l)_{l=1}^h$ eine abstrakte Ökonomie. Für jedes l gelte:*

i) S^l ist eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge eines euklidischen Raumes.

ii) Ψ^l ist stetig und jedes $\Psi^l(s)$ ist nichtleer, abgeschlossen und konvex für jedes $s \in S$.

iii) v^l ist stetig und jedes $v^l(s, \cdot)$ ist quasikonkav für jedes $s \in S$.

Dann besitzt $\mathcal{A}$ ein soziales Gleichgewicht.

Beweis. Sei $\alpha^l(s) := \sup_{z \in \Psi^l(s)} v^l(s, z)$ und $\Phi^l(s) := \{t^l \in \Psi^l(s) : v^l(s, t^l) = \alpha^l(s)\}$.

Nach dem Maximumsatz von Berge (8.11) ist α^l stetig und $\Phi^l(s)$ eine ohs Korrespondenz von S nach S^l. Da v^l stetig und $\emptyset \neq \Psi^l(s)$ kompakt ist, ist $\Phi^l(s)$ nicht leer und abgeschlossen (also als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge auch kompakt).

Wir wollen noch zeigen, dass $\Phi^l(s)$ auch konvex ist. Seien $y^l, z^l \in \Phi^l(s)$, $\lambda \in (0, 1)$, und $u_\lambda := (1 - \lambda)y^l + \lambda z^l$.

Da $\Psi^l(s)$ konvex ist gilt $u_\lambda \in \Psi^l(s)$, und da $v^l(s, \cdot)$ quasikonkav ist erhalten wir aus

$$v^l(s, y^l) \overset{(\geq)}{=} \alpha^l(s)$$
$$v^l(s, z^l) \overset{(\geq)}{=} \alpha^l(s)$$

die Ungleichung $v^l(s, u_\lambda) \geqq \alpha^l(s)$, was zu zeigen war (das $\geqq$ ist offenbar ein $=$).

Betrachte die „Produktkorrespondenz" Φ von S nach S, d.h. $\Phi(s) = (\Phi^1(s), \ldots, \Phi^h(s))$. Hier ist S kompakt, konvex und alle $\Phi(s)$ sind nicht leer, abgeschlossen und konvex. Mit den Φ^l ist auch Φ ohs (nach 8.8). Mit 8.13 und 8.14 folgt die Existenz eines $\bar{s}$ mit $\bar{s} \in \Phi(\bar{s})$. Nun gilt

$$\bar{s}^l \in \Phi^l(\bar{s})$$

woraus mit den Definitionen unmittelbar ersichtlich ist, dass $\bar{s}$ ein soziales Gleichgewicht ist. □

Literatur zu Kapitel 8: [**AH**], [**Au**], [**De**], [**Hi**], [**HK**], [**Ich**], [**KN**], [**Ni 1**]

9 Gleichgewichte in Ökonomien mit Privateigentum

Wir erweitern das Konzept der reinen Tauschökonomie, indem wir auch die Möglichkeit der Produktion von Gütern mit einbeziehen:

Wie in Kapitel 4 betrachten wir eine Ökonomie mit n Gütern und m Konsumenten; daneben seien k Produzenten gegeben.

Sei also

$$\begin{aligned} M &:= \{1,\ldots,m\} && \text{die Menge der Konsumenten und} \\ K &:= \{1,\ldots,k\} && \text{die Menge der Produzenten.} \end{aligned}$$

Wie in Kapitel 4 sei jedem $i \in M$ eine *Konsummenge* $X^i \subset \mathbb{R}^n$ versehen mit einer Präferenzrelation $\succeq^i$, sowie eine *Grundausstattung* $a^i \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Analog sei für $j \in K$ eine nichtleere Menge $Y^j \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, der *Aktionsbereich* des Produzenten j.

$$\begin{aligned} x^i \in X^i: \;& x^i_l > 0\text{: die Menge } x^i_l \text{ des Gutes } l \text{ wird konsumiert.} \\ & x^i_l < 0\text{: die Menge } |x^i_l| \text{ des Gutes } l \text{ wird abgegeben.} \\ y^j \in Y^j: \;& y^j_l > 0\text{: die Menge } y^j_l \text{ des Gutes } l \text{ wird produziert(Output).} \\ & y^j_l < 0\text{: die Menge } |y^j_l| \text{ des Gutes } l \text{ wird in den Produktionsprozess eingebracht (Input).} \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass sich die Produktionsstätten – etwa in der Form von Aktien – ganz in den Händen der Konsumenten befinden. („private ownership economy“)

Der Konsument $i \in M$ sei mit dem Anteil θ_{ij} ($\geqq 0$) an der Produktionsstätte $j \in K$ beteiligt, es sei also

$$\sum_{i\in M} \theta_{ij} = 1 \qquad \forall j \in K$$

Unter dem Preis $p \in \mathbb{P}^n$ ist $p^t y^j$ der (Netto-)Gewinn des Produzenten j, wenn er den Produktionsplan $y^j \in Y^j$ wählt. Setzt man

$$\rho^j(p) := \sup_{y^j\in Y^j} p^t y^j$$

so ist

$$r^i(p) := p^t a^i + \sum_{j\in K} \theta_{ij}\rho^j(p)$$

das *Budget* des Konsumenten i unter dem Preisvektor p.

Eine *Ökonomie mit Privateigentum* $\mathcal{P}$ (kurz: *P-Ökonomie*) wird demnach beschrieben durch ein Tupel

$$\mathcal{P} = \Big(\big(X^i, \succeq^i, a^i\big)_{i\in M}, (\theta_{ij})^{j\in K}_{i\in M}, \big(Y^j\big)_{j\in K} \Big)$$

Wieder sei

$$B^i(p, r^i) = \Big\{ x^i \in X^i : p^t x^i \leqq r^i(p) \Big\}$$

die *Budgetmenge* des Konsumenten i.

$$B^i : \mathbb{P}^n \to \mathcal{P}(X^i) \text{ mit } B^i(p) := B^i(p, r^i(p))$$

ist die *Budgetkorrespondenz*, und

$$D^i : \mathbb{P}^n \to \mathcal{P}(X^i) \text{ mit } D^i(p) := \max(B^i(p), \succeq^i)$$

ist die *Nachfragekorrespondenz* (Menge der von Konsument i erwünschten Güterbündel).

Die *Gewinnkorrespondenz* für den Produzenten j sei

$$G^j : \mathbb{P}^n \to \mathcal{P}(Y^j) \text{ mit } G^j(p) := \Big\{ y^j \in Y^j : p^t y^j = \max_{z^j\in Y^j} p^t z^j \Big\}$$

9.1 Definition. Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie (mit den Bezeichnungen wie oben). Dann heißt ein Tupel $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \in X \times Y \times \mathbb{P}^n$ mit $X = \prod_{i\in M} X^i$, $Y = \prod_{j\in K} Y^j$ ein *Gleichgewicht*, wenn gilt:

i) $\bar{x}^i \in D^i(\bar{p})$ für alle $i \in M$.

ii) $\bar{y}^j \in G^j(\bar{p})$ für alle $j \in K$.

iii) $\sum_{i\in M} \bar{x}^i \leqq \sum_{j\in K} \bar{y}^j + a$ mit $a = \sum_{i\in M} a^i$.

Das Gleichgewicht heißt *Walras-Gleichgewicht*, wenn gilt:

$$\bar{p}^t \left(\sum_{i\in M} \bar{x}^i - \sum_{j\in K} \bar{y}^j - a \right) = 0$$

9.2 Bemerkung. Ist $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i\in M}$ eine reine Tauschökonomie, so wird durch $\mathcal{P} = (\mathcal{E}, (\theta_{i1})_{i\in M}, Y^1)$ mit $Y^1 = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ und z.B.: $\theta_{i1} = \frac{1}{m}$ (für alle i) eine P-Ökonomie definiert und $(\bar{x}, \bar{p})$ ist ein TGL in $\mathcal{E}$ genau dann wenn $(\bar{x}, 0, \bar{p})$ ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$ ist.

9.3 Beispiel. Wir betrachten eine P-Ökonomie mit einem Produzenten, einem Konsumenten und zwei Gütern (d.h. $m = k = 1$, $n = 2$). Gut 1 sei ein Konsumgut, welches als Output des Produktionsprozesses auftritt und Gut 2 sei Arbeit, welche als Input für den Produktionsprozess benötigt wird und vom Konsumenten abgegeben wird. Der Konsument kann ganz über die Produktion verfügen.

Modell: $x^1 = \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix}$, $x \geqq 0$, $0 \leqq z \leqq 1$ (Der Konsument kann höchstens eine Einheit Arbeit leisten.)
$y^1 = \begin{pmatrix} \alpha y \\ -y \end{pmatrix}$, $y \geqq 0$ mit festem $\alpha \in (0,1]$.
Eine Einheit Arbeit (Input) produziert α Einheiten des Konsumguts (Output).
Kein Erstbesitz, d.h. $a^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Die Präferenzordnung des Konsumenten sei durch die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

$$u(x,z) = \alpha \log x + (1-\alpha)\log \underbrace{(1-z)}_{\text{Freizeit}}$$

gegeben. Wir haben

$$\begin{aligned}
r^1(p) &= \underbrace{p^t a^1}_{=0} + \rho^1(p) = \sup_{z^1 \in Y^1} p^t z^1 = \sup_{y \geqq 0}(\alpha p_1 - p_2)y = \begin{cases} 0 & \alpha p_1 \leqq p_2 \\ \infty & \alpha p_1 > p_2 \end{cases} \\
B^1(p, r^1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix} : p_1 x - p_2 z \leqq r^1(p) \right\} \\
&= \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix} : p_1 x \leqq p_2 z \right\} & \text{falls } \alpha p_1 \leqq p_2 \\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \end{pmatrix} : x \geqq 0, z \in [0,1] \right\} & \text{falls } \alpha p_1 > p_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Fortsetzung: Übung. ◇

In einer P-Ökonomie sei jedes $\succeq^i$ durch eine Nutzenfunktion u^i darstellbar. Dann kann $\mathcal{P}$ wie folgt eine abstrakte Ökonomie

$$\mathcal{A} = (S^l, \Psi^l, v^l)_{l=1}^h \qquad \text{mit } h = m+k+1$$

zugeordnet werden. Die Akteure sind dabei die m Konsumenten, die k Produzenten und ein zusätzlicher fiktiver Akteur (nach Adam Smith: „invisible hand"). Der Akteur $m+k+1$ „regelt die Preise", d.h. es ist

$$\begin{aligned}
S^l &= X^l & &\text{für } 1 \leqq l \leqq m \\
S^l &= Y^{l-m} & &\text{für } m < l \leqq m+k \\
S^{m+k+1} &= \mathbb{P}^n
\end{aligned}$$

$$X := \prod_{i=1}^m X^i,\ Y = \prod_{j=1}^k Y^j,\ S := X \times Y \times \mathbb{P}^n$$

$$\Psi^l(x,y,p) = \begin{cases} B^l(p) & 1 \leqq l \leqq m \\ Y^{l-m} & m < l \leqq k+m \\ \mathbb{P}^n & l = m+k+1 \end{cases}$$

Die Nutzenfunktion v^l sei definiert gemäß

$$\begin{aligned}
v^l\big((x,y,p),\tilde{x}^l\big) &= u^l(\tilde{x}^l) & & 1 \leqq l \leqq m, \quad \tilde{x}^l \in X^l \\
v^l\big((x,y,p),\tilde{y}^{l-m}\big) &= p^t \tilde{y}^{l-m} & & m < l \leqq m+k, \quad \tilde{y}^{l-m} \in Y^{l-m} \\
v^{m+k+1}\big((x,y,p),q\big) &= q^t\left(\sum_{i\in M} x^i - \sum_{j \in K} y^j - a\right) & & q \in \mathbb{P}^n
\end{aligned}$$

9.4 Lemma. *Ordnet man der P-Ökonomie wie oben die abstrakte Ökonomie $\mathcal{A}$ zu, so gilt:*

a) Jedes soziale Gleichgewicht in $\mathcal{A}$ ist ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$.

b) Jedes Walras'sche Gleichgewicht in $\mathcal{P}$ ist ein soziales Gleichgewicht in $\mathcal{A}$.

Beweis. *a)* Sei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ ein soziales Gleichgewicht in $\mathcal{A}$:

Für $1 \leqq i \leqq m$ haben wir nach (SG2): $u^i(\bar{x}^i) \geqq u^i(x^i)$ für alle $x^i \in \Psi^i(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) = B^i(\bar{p})$.
Mit (SG1) erhalten wir desweiteren $\bar{x}^i \in B^i(\bar{p})$. Diese beiden Tatsachen zeigen, dass Eigenschaft (i) eines Gleichgewichts erfüllt ist.

Für $m < l \leqq m+k$ haben wir nach (SG2): $\bar{p}^t \bar{y}^j \geqq \bar{p}^t y^j$ für alle $y^j \in \Psi^j(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) = Y^j$. Das bedeutet, dass Eigenschaft (ii) eines Gleichgewichts erfüllt ist.
Für Eigenschaft (iii) sehen wir, dass

$$\bar{p}^t\left(\sum_{i\in M}\bar{x}^i - \sum_{j\in K}\bar{y}^j - a\right) \geqq p^t\left(\sum_{i\in M}\bar{x}^i - \sum_{j\in K}\bar{y}^j - a\right) \tag{9.1}$$

für alle $p \in \mathbb{P}^n$ gilt. Nun rechnen wir

$$\begin{aligned}
\bar{x}^i \in B^i(\bar{p}) \quad &\Rightarrow \quad \bar{p}^t \bar{x}^i \leqq r^i(\bar{p}) = \bar{p}^t a^i + \sum_j \theta_{ij}\bar{p}^t \bar{y}^j \\
&\Rightarrow \quad \bar{p}^t\left(\sum_{i\in M}\bar{x}^i\right) \leqq \bar{p}^t\left(\sum_{i\in M} a^i\right) + \sum_j \underbrace{\left(\sum_i \theta_{ij}\right)}_{=1}\bar{p}^t\bar{y}^j \\
&\Rightarrow \quad \bar{p}^t\left(\sum \bar{x}^i - \sum \bar{y}^j - a\right) \leqq 0 \\
&\Rightarrow \quad p^t\left(\sum \bar{x}^i - \sum \bar{y}^j - a\right) \leqq 0
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt für alle $p \in \mathbb{P}^n$ aufgrund von (9.1). Damit erhalten wir

$$\sum \bar{x}^i \leqq \sum \bar{y}^j + a$$

(indem wir nacheinander $p = e^l$ für $l \leqq n$ einsetzen), was Eigenschaft (iii) zeigt.

b) Übung. □

9.5 Lemma. *Gegeben sei eine P-Ökonomie $\mathcal{P}$.*

a) Für $i \in M$ sei r^i stetig, X^i abgeschlossen und konvex und es gelte

$$\text{Für alle } p \in \mathbb{P}^n \text{ existiert ein } \tilde{x}^i \in X^i \text{ mit } p^t\tilde{x}^i < r^i(p) \tag{9.2}$$

Dann gilt:

i) $B^i(p)$ ist nicht leer, abgeschlossen und konvex (für alle p).
ii) Gr B^i ist abgeschlossen.
iii) B^i ist uhs.
iv) Ist X^i kompakt, so ist B^i stetig.
v) Ist X^i kompakt und $\succeq^i$ eine abgeschlossene Präferenzordnung, so ist D^i ohs.
vi) Ist $\succeq^i$ eine ohs Präferenzordnung, so ist $D^i(p)$ abgeschlossen für alle p.

b) Für $j \in K$ gilt:

vii) $Gr\, G^j$ *ist abgeschlossen.*

viii) Ist Y^j *kompakt und konvex, so ist* G^j *ohs, und für alle* p *ist* $G^j(p)$ *konvex, kompakt und nicht leer.*

Beweis. *i)* Wegen (9.2) ist $B^i(p)$ nicht leer. Abgeschlossenheit und Konvexität sind klar, da die Bedingung linear und abgeschlossen ist.

ii) Die Menge $Gr\Phi = \{(p,x) : p^t x \leqq r^i(p)\}$ ist abgeschlossen, da alle beteiligten Funktionen stetig sind.

iii) (⊛) Sei $\bar{p} \in \mathbb{P}^n$ und $G \subset X^i$ offen mit $B^i(\bar{p}) \cap G \neq \emptyset$.

Sei $\bar{x}^i \in B^i(\bar{p}) \cap G$.
Falls $\bar{p}^t \bar{x}^i < r^i(\bar{p})$ ist, so ist die Menge $U := \{p \in \mathbb{P}^n : p^t \bar{x}^i < r^i(p)\}$ eine offene Umgebung von $\bar{p}$ (da r^i stetig ist) und es gilt $\bar{x}^i \in B^i(p) \cap G$ für alle $p \in U$.

Falls $\bar{p}^t \bar{x}^i = r^i(\bar{p})$ gilt, so wählen wir $\tilde{x}^i$ gemäß (9.2) und setzen $x^i_\lambda := \lambda \tilde{x}^i + (1-\lambda)\bar{x}^i$.
Nun gilt $\bar{p}^t x^i_\lambda < r^i(\bar{p})$ für alle $\lambda \in (0,1]$. Da G offen ist gibt es ein $\lambda_0 > 0$ mit $x^i_{\lambda_0} \in G$, und wir können wie oben argumentieren.

iv) Da X^i kompakt ist, und nach *(ii)* der Graph $Gr\, B^i$ abgeschlossen ist, folgt nach 8.6 dass B^i ohs ist, zusammen mit *(iii)* also stetig.

v) Nach dem Satz von Debreu 5.17 existiert eine stetige Nutzenfunktion u^i für $\succeq^i$.
Setze $f^i(p,x) = u^i(x)$. Dann ist f^i eine stetige Funktion von $\mathbb{P}^n \times X^i$ nach $\mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} D^i(p) &= \{x^i \in B^i(p) : u^i(x^i) = \max_{z^i \in B^i(p)} u^i(z^i)\} \\ &= \{x^i \in B^i(p) : f^i(p,x^i) = \max_{z^i \in B^i(p)} f^i(p,z^i)\} \end{aligned}$$

Wir können den Satz von Berge 8.11 anwenden und erhalten, dass D^i ohs ist.

vi) Da $\succeq^i$ eine Präferenzordnung ist, gilt

$$D^i(p) = \mathrm{dom}(B^i(p), \succeq^i) = \underbrace{B^i(p)}_{\text{abg. nach } (i)} \cap \bigcap_{x^i \in X^i} \underbrace{\left\{z^i \in X^i : z^i \succeq^i x^i\right\}}_{\text{abgeschlossen n.V.}}$$

Somit ist $D^i(p)$ abgeschlossen.

vii), viii) analog zu *(i), (ii), (iv)*. □

9.6 Satz von Arrow-Debreu

9.6 Satz. *Sei* $\mathcal{P}$ *eine P-Ökonomie. Für jedes* $i \in M$ *gelte:*

i) X^i *ist konvex und kompakt.*

ii) $\succeq^i$ *ist eine abgeschlossene, schwach konvexe Präferenzordnung.*

iii) Für alle $p \in \mathbb{P}^n$ *gibt es ein* $\tilde{x}^i \in X^i$ *mit* $p^t \tilde{x}^i < p^t a^i$.

iv) Für jedes $j \in K$ *gelte:* Y^j *ist konvex und kompakt und* $0 \in Y^j$.

Dann existiert ein Gleichgewicht.

Beweis. Wir ordnen $\mathcal{P}$ wie oben die abstrakte Ökonomie $\mathcal{A}$ zu und prüfen nach, dass $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arrow-Debreu-Nash 8.17 erfüllt.

i) S^l ist nicht leer, konvex und kompakt für alle l nach Voraussetzung (bzw. trivialerweise im Falle $l = m+k+1$).

ii) Die Voraussetzung (9.2) des obigen Lemmas ist erfüllt wegen $0 \in Y^j$ und

$$p^t \tilde{x}^i < p^t a^i = p^t a^i + \sum_j \theta_{ij} 0 \leqq p^t a^i + \sum_j \theta_{ij} \underbrace{\sup_{y^j \in Y^j} p^t y^j}_{\rho^j(p)} = r^i(p)$$

Nach Satz 8.9 und Satz 8.10 sind die ρ^j stetig. Daraus ergibt sich die Stetigkeit von r^i.

Für $l \leqq m$ sowie $s = (x,y,p)$ ist $\Psi^l(s) = B^l(p)$; diese Menge ist konvex, abgeschlossen (daher auch kompakt) und nicht leer ((*i*) des vorigen Lemmas). B^l (und damit auch Ψ^l) ist stetig nach (*iv*) des vorigen Lemmas.

Für $l > m$ erfüllt Ψ^l trivialerweise Bedingung (*ii*).

iii) Nach dem Satz von Debreu 5.17 gibt es zu $\succeq^i$ eine stetige Nutzenfunktion u^i welche nach 5.9.b.i quasikonkav ist. Hieraus folgt, dass für alle l Voraussetzung (*iii*) erfüllt ist.

Wir können also auf die Existenz eines sozialen Gleichgewichts schließen. Dieses ist nach 9.4 ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$. □

Aber: Unter den obigen Voraussetzungen muss kein Walras-Gleichgewicht existieren.
Gegenbeispiel:

$$X^1 = Y^1 = \{0\} \subset \mathbb{R}, \qquad a^1 = 1, \qquad \mathbb{P}^1 = \{1\}$$

Hier ist $\succeq^i = X^1 \times X^1$ die einzige Präferenzordnung. Aber

$$p^t(x^1 - y^1 - a) = -1 \neq 0$$

9.7 Definition. Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie. Dann heißt ein $x^i \in X^i$ *realisierbar*, wenn es für jedes $l \neq i$ ein $x^l \in X^l$, und für alle $j \leqq k$ ein $y^j \in Y^j$ gibt, so dass

$$x^i + \sum_{l \neq i} x^l \leqq \sum_{j \in K} y^j + \sum_{l \in M} a^l$$

gilt. Sei weiter

$$\hat{X}^i := \{x^i \in X^i : x^i \text{ ist realisierbar}\}$$

9.8 Korollar. *Ist in der Situation von 9.6 jedes $\succeq^i$ konvex, und gibt es für alle $i \in M$ und alle $x^i \in \hat{X}^i$ ein $\hat{x}^i \in \hat{X}^i$ mit $\hat{x}^i \succ^i x^i$ („$\hat{X}^i$ enthält keinen Sättigungspunkt“), so ist jedes Gleichgewicht Walras'sch.*

Beweis. Sei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ ein Gleichgewicht.
Dann gilt $\bar{p}^t \bar{x}^i = r^i(\bar{p})$ $(*)$ für alle i, denn:

Für jedes i ist $\bar{x}^i \in \hat{X}^i$ und es gibt ein $\hat{x}^i \in \hat{X}^i$ mit $\hat{x}^i \succ^i \bar{x}^i$.

Angenommen, es gäbe ein i mit $\bar{p}^t \bar{x}^i < r^i(\bar{p})$. Sei $x^i_\lambda = \lambda \hat{x}^i + (1-\lambda)\bar{x}^i$. Dann gilt $x^i_\lambda \in X^i$ da X^i konvex ist. Nun gibt es ein $\lambda \in (0,1)$ mit $\bar{p}^t x^i_\lambda < r^i(\bar{p})$, also $x^i_\lambda \in B^i(\bar{p})$.

Da $\succeq^i$ konvex ist, folgt $x^i_\lambda \succ^i \bar{x}^i$. Wir haben den Widerspruch $\bar{x}^i \notin D^i(\bar{p})$ erreicht.

Mit $(*)$ können wir nun schließen:

$$\begin{aligned}\bar{p}^t \left(\sum_i \bar{x}^i\right) &= \sum_i r^i(\bar{p}) = \sum_j \sum_i \theta_{ij} \bar{p}^t \bar{y}^j + \bar{p}^t \left(\sum a^i\right) \\ &= \bar{p}^t \left(\sum \bar{y}^j + a\right)\end{aligned}$$

□

9.9 Lemma. *Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex, und gelte $Y \cap (-Y) = \{0\}$ sowie $Y \supset -\mathbb{R}^n_+$. Dann existiert zu jedem $b \in \mathbb{R}^n$ und jedem $\nu \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass aus $y^1, \ldots, y^\nu \in Y$ und $\sum_{i=1}^\nu y^i \geqq b$ folgt: $\|y^j\| \leqq N$ für alle $j \leqq \nu$.*

Beweis. Sei $K := \{y \in Y : \|y\| = 1\}$.

1. *Es gilt $0 \notin$ conv K.*[10] Angenommen, es gilt

$$0 = \alpha_1 y^1 + \cdots + \alpha_\nu y^\nu, \quad y^i \in K, \quad \alpha_i \neq 0, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) \in \mathbb{P}^\nu$$

Dann wäre

$$-\alpha_1 y^1 = \alpha_1 0 + \alpha_2 y^2 + \ldots \alpha_\nu y^\nu \in Y$$

(da Y konvex ist). Es gilt auch

$$\alpha_1 y^1 = \alpha_1 y^1 + (1-\alpha_1) 0 \in Y$$

Das heißt $\alpha_1 y^1 \in Y \cap (-Y)$, also $\alpha_1 = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

[10] Hier ist folgende etwas allgemeinere Definition von conv gemeint:

$$\text{conv } K = \bigcap \{C \supset K : C \text{ konvex}\} = \left\{\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{P}^k, x_i \in K\right\}$$

Carathéodory zeigte, dass für $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\text{conv } X = \left\{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i : (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{P}^{n+1}, x_i \in X\right\}$$

Hieraus folgt u.a. dass für K kompakt auch conv K kompakt ist.

2. *Es gibt ein $q = (q_1, \ldots, q_n)^t \in \mathbb{R}^n$ mit $q > 0$ und $q^t x < 0$ für alle $x \in K$.*
Zunächst bemerken wir, dass K kompakt ist, und somit auch conv K (nach Carathéodory). Nach dem Trennungssatz 4.7 können wir auf die Existenz eines q mit $q^t x < 0$ für alle $x \in$ conv K schließen.Da offenbar $-e^i \in K$ gilt, folgt $-q_i = q^t(-e^i) < 0$ für alle i.

3. *Zu obigem q gibt es $\varepsilon > 0$, $\beta > 0$, so dass $q^t y \leqq \beta + \varepsilon(1 - \|y\|)$ für alle $y \in Y$ gilt.*
Wir definieren $\varepsilon := -\max\{q^t x : x \in K\} > 0$ und $\beta := \max\{q^t x : \|x\| \leqq 1\} > 0$.
Falls $\|y\| \leqq 1$ ist, so gilt: $q^t y \leqq \beta \leqq \beta + \varepsilon(1 - \|y\|)$.
Falls $\|y\| > 1$ ist, so ist $\frac{y}{\|y\|}$ in K, und es gilt

$$-\varepsilon \geqq \frac{q^t y}{\|y\|}, \quad \text{also} \quad q^t y \leqq -\varepsilon \|y\| \leqq \beta + \varepsilon(1 - \|y\|)$$

4. Sei nun $y^j \in Y$ mit $y^1 + \cdots + y^\nu \geqq b$. Also

$$q^t b \leqq \sum_{j=1}^\nu q^t y^j \leqq \nu(\beta + \varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^\nu \|y^j\|$$

Nun folgt

$$\|y^j\| \leqq \sum_{j=1}^\nu \|y^j\| \leqq \nu\left(\frac{\beta}{\varepsilon} + 1\right) - \frac{q^t b}{\varepsilon}$$

Da die rechte Seite von der Wahl der y^j unabhängig ist, beendet dies den Beweis. □

9.10 Satz von Arrow-Debreu-Uzawa

9.10 Satz. *Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie. Für jedes $i \in M$ gelte:*

i) X^i ist konvex, abgeschlossen und nach unten beschränkt (d.h. es gibt ein $b^i \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x^i \in X^i$ gilt: $x^i \geqq b^i$; diese werden im Beweis verwendet).

ii) $\succeq^i$ ist eine abgeschlossene, konvexe Präferenzordnung.

iii) $\hat{X}^i$ enthält keinen Sättigungspunkt.

iv) Es gibt ein $\tilde{x}^i \in X^i$ mit $\tilde{x}^i < a^i$.

v) Für jedes $j \in K$ gelte $0 \in Y^j$.

vi) Für $Y_S := Y^1 \oplus \cdots \oplus Y^k$ gilt $Y_S \cap (-Y_S) = \{0\}$ und $Y_S \supset -\mathbb{R}^n_+$. Ferner sei Y_S abgeschlossen und konvex.

Dann existiert ein Gleichgewicht $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ mit

$$\sum_{i \in M} \bar{x}^i = \sum_{j \in K} \bar{y}^j + \sum_{i \in M} a^i$$

insbesondere ist das Gleichgewicht Walras'sch.

Die Bedingung $Y_S \cap (-Y_S) = \{0\}$ heißt „Irreversibilitätsbedingung“; es gibt kein Perpetuum Mobile. $Y_S \supset -\mathbb{R}^n_+$ bedeutet: alle Güter sind als Input frei verfügbar, es gibt keine Kapazitätsbeschränkung.

Beweis. 1. Es gilt unter unseren Voraussetzungen (Beweis: Übung):

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{conv} Y^1) \oplus \cdots \oplus (\operatorname{conv} Y^k) &= \operatorname{conv}(Y^1 \oplus \cdots \oplus Y^k) = Y_S \\
\bar{Y}^1 \oplus \cdots \oplus \bar{Y}^k &= \overline{Y^1 \oplus \cdots \oplus Y^k} = Y_S \\
\operatorname{conv} \bar{Y}^1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{conv} \bar{Y}^k &= Y_S
\end{aligned} \tag{9.3}
$$

2. Sei $\bar{\mathcal{P}}$ die P-Ökonomie, die man erhält, wenn man in $\mathcal{P}$ die Mengen Y^j durch $\operatorname{conv} \bar{Y}^j$ ersetzt. Sei weiter

$$\bar{A} := \left\{ (x,y) \in \prod_{i \in M} X^i \times \prod_{j \in K} \operatorname{conv} \bar{Y}^j : \sum_{i \in M} x^i \leqq \sum_{j \in K} y^j + a \right\}$$

die Menge der möglichen Aktionen in $\bar{\mathcal{P}}$. Wegen (9.3) stimmen in $\mathcal{P}$ und $\bar{\mathcal{P}}$ die Mengen $\hat{X}^i$ der realisierbaren $x^i \in X^i$ überein, und es gilt

$$(x,y) \in \bar{A} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in K} y^j \geqq \sum_{i \in M} x^i - a \geqq \sum_{i \in M} b^i - a$$

Nun wenden wir Lemma 9.9 auf Y_S an und schließen auf die Existenz eines N, so dass $\|y^j\| \leqq N$ für alle $j \in K$ gilt. Für festes i rechnen wir

$$b^i \leqq x^i \leqq \sum y^j - \sum_{l \neq i} x^l + a \leqq kN \cdot e - \sum_{l \neq i} b^l + a$$

Somit gibt es ein ν, so dass gilt:

$$(x,y) \in \bar{A} \quad \Rightarrow \quad \left\|x^i\right\| < \nu, \ \left\|y^j\right\| < \nu, \ \left\|\tilde{x}^i\right\| < \nu \ \text{(vgl. Voraussetzung } (iv))$$

3. Für $B := \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \leqq \nu\}$ betrachten wir nun die P-Ökonomie

$$
\begin{aligned}
\breve{\mathcal{P}} &:= \left(\left(\breve{X}^i, \succeq^i, a^i \right), \theta_{ij}, \breve{Y}^j \right)_{i \in M}^{j \in K} \\
\text{mit } \breve{X}^i &:= X^i \cap B; \qquad \text{insbesondere gilt } \tilde{x}^i \in \breve{X}^i \\
\text{und } \breve{Y}^j &:= \operatorname{conv} \bar{Y}^j \cap B
\end{aligned}
$$

Hier bezeichnen wir die Einschränkung von $\succeq^i$ auf $\breve{X}^i$ wieder mit $\succeq^i$. Diese Einschränkung ist wieder konvex und abgeschlossen, folglich auch schwach konvex nach Satz 3.9. Nun erfüllt $\breve{\mathcal{P}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arrow-Debreu 9.6, d.h. es existiert ein Gleichgewicht $(\breve{x}, \breve{y}, \breve{p})$ in $\breve{\mathcal{P}}$.

Wegen $\bar{A} = \breve{A}$ (die möglichen Aktionen in $\bar{\mathcal{P}}$ und $\breve{\mathcal{P}}$ sind dieselben) ist die Menge der realisierbaren $x^i \in X^i$ in $\breve{\mathcal{P}}$ ebenfalls in $\hat{X}^i$. Nach Korollar 9.8 ist das Gleichgewicht Walras'sch.

4. Sei $z = \sum_{i \in M} \breve{x}^i - \sum_{j \in K} \breve{y}^j - a$ der Nachfrageüberschuss bei obigem Gleichgewicht. Per definitionem ist $z \leqq 0$ und $\breve{p}^t z = 0$, da das Gleichgewicht Walras'sch ist. Wegen $\breve{y}^j \in \breve{Y}^j \subset \operatorname{conv} \bar{Y}^j$ und (9.3) gilt $y := \sum_{j \in K} \breve{y}^k \in Y_S$.

Für $0 < \lambda \leqq 1$ ist $\frac{z}{\lambda} \in -\mathbb{R}^n_+ \subset Y_S$. Da Y_S konvex ist, erhalten wir

$$(1-\lambda)y + \underbrace{\lambda \frac{z}{\lambda}}_{z} \in Y_S$$

mit der Abgeschlossenheit von Y_S können wir $y + z \in Y_S$ folgern. Das heißt: Es gibt $\bar{y}^j \in Y^j$, so dass $\sum_{j \in K} \bar{y}^j = y + z$ (aufgrund der Gestalt von Y_S).

Dann ist

$$\sum_{i \in M} \breve{x}^i = z + y + a = \sum_{j \in K} \bar{y}^j + a \tag{9.4}$$

5. Wir prüfen jetzt, dass $(\breve{x}, \bar{y}, \breve{p})$ ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$ ist.

Nach (9.4) ist Bedingung (iii) erfüllt.

Bedingung (ii): Wir haben oben gesehen, dass $\breve{p}^t z = 0$ gilt. Es folgt

$$\breve{p}^t \left(\sum_j \bar{y}^j \right) = \breve{p}^t z + \breve{p}^t y = \breve{p}^t \left(\sum \breve{y}^j \right) \tag{9.5}$$

$(\breve{x}, \breve{y}, \breve{p})$ ist ein Gleichgewicht in $\breve{\mathcal{P}}$, also gilt

$$\breve{p}^t \breve{y}^j \geqq \breve{p}^t z^j \text{ für alle } z^j \in \breve{Y}^j \tag{9.6}$$

Wir haben auch $(\breve{x}, \bar{y}) \in \bar{A}$ (nach Definition und (9.4)), also $\bar{y}^j \in \breve{Y}^j$. Mit (9.6) folgt

$$\breve{p}^t \breve{y}^j \geqq \breve{p}^t \bar{y}^j \quad \underset{(9.5)}{\Rightarrow} \quad \breve{p}^t \breve{y}^j = \breve{p}^t \bar{y}^j \tag{9.7}$$

Wir müssen noch zeigen, dass $\breve{p}^t \bar{y}^j = \max_{z^j \in Y^j} \breve{p}^t z^j$ gilt. Angenommen, es gäbe ein

$$\tilde{z}^j \in Y^j \text{ mit } \breve{p}^t \tilde{z}^j > \breve{p}^t \bar{y}^j$$

Dann würde dies auf dem ganzen „Intervall“ $[\tilde{z}^j, \bar{y}^j)$ gelten, woraus sofort ein Widerspruch folgt, weil dieses Intervall nach $\breve{Y}^j$ hineinragt (man beachte, dass $\|\bar{y}^j\| < \nu$ gilt).

Bedingung (i): Wir müssen zeigen, dass $\breve{x}$ in $\mathcal{P}$ allseits erwünscht ist unter $\breve{p}$. Da $(\breve{x}, \breve{y}, \breve{p})$ ein Gleichgewicht in $\breve{\mathcal{P}}$ ist, ist $\breve{x}^i$ $\succeq^i$-maximal in

$$\breve{B}^i(\breve{p}) := \{x^i \in \breve{X}^i : \breve{p}^t x^i \leqq \breve{p}^t a + \sum_j \theta_{ij} \underbrace{\breve{p}^t \breve{y}^j}_{= \breve{p}^t \bar{y}^j}\}$$

Ähnlich wie oben können wir (mit der Konvexität von $\succeq^i$) aus der Annahme, $\breve{x}^i$ sei nicht in $D^i(\breve{p})$ einen Widerspruch herleiten. $\square$

9.11 Ein zweiter Zugang

9.11 Definition. Sei $\mathcal{P}$ eine P-Ökonomie mit den Nachfragekorrespondenzen D^i, und den Gewinnkorrespondenzen G^j. Dann heißt[11]

$$Z : \mathbb{P}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$
$$Z(p) = \bigoplus_{i \in M} D^i(p) - \bigoplus_{j \in K} G^j(p) - \sum_i a^i$$

die *Nachfrageüberschusskorrespondenz.*

9.12 Satz von Gale-Nikaido-Debreu

9.12 Satz. *In der Situation von 9.11 gelte*

i) $p^t z \leqq 0$ *für alle* $p \in \mathbb{P}^n$ *und alle* $z \in Z(p)$. *(„$\mathcal{P}$ ist global solide")*

ii) $Z(p)$ *ist nicht leer, konvex und kompakt für alle* $p \in \mathbb{P}^n$.

iii) Z *ist nach oben halbstetig.*

Dann besitzt $\mathcal{P}$ *ein Gleichgewicht.*

Beweis. $\Phi = Z$ erfüllt die Voraussetzungen von Aufgabe 36. Also gibt es ein $\bar{p} \in \mathbb{P}^n$ und ein $\bar{z} \in Z(\bar{p})$ mit $p^t\bar{z} \leqq 0$ für alle $p \in \mathbb{P}^n$. Somit gilt $\bar{z} \leqq 0$.

Wegen $\bar{z} \in Z(\bar{p})$ wissen wir, dass man $\bar{z}$ als $\sum_{i\in M} \bar{x}^i - \sum_{j\in K} \bar{y}^j - \sum_{i\in M} a^i$ schreiben kann.

Aus der Definition der Nachfrageüberschusskorrespondenz können wir unmittelbar ablesen, dass $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ ein Gleichgewicht in $\mathcal{P}$ ist. □

Man kann mit dem obigen Satz, Lemma 9.5 sowie dem folgenden Lemma einen zweiten Beweis zum Satz von Arrow-Debreu finden.

9.13 Lemma. *Sei* X *ein topologischer Raum und* Φ^i *Korrespondenzen von* X *nach* $\mathbb{R}^k$ *(für* $i \leqq k$*). Sind alle* Φ^i *ohs und alle* $\Phi^i(x)$ *konvex und kompakt, so gilt dies auch für die „Summenkorrespondenz"*

$$\Phi(x) := \Phi^1(x) \oplus \cdots \oplus \Phi^k(x)$$

Beweis. Übung oder ([**HK**, S. 19]). □

Literatur zu Kapitel 9: [**AH**], [**Au**], [**De**], [**Hi**], [**HK**], [**Ich**], [**KN**], [**Ni 1**], [**Ro 1**], [**Ro 2**], [**Va**].

[11] Die Differenz in der Gleichung ist eine „echte", d.h. Vektorraum-Differenz, keine Mengendifferenz. Vgl. auch Fußnote 2 auf Seite 5.

10 Cournot-Nash-Gleichgewichte, Oligopole

Den bisher betrachteten Modellen für Ökonomien war gemeinsam, dass die Marktteilnehmer ein „preisnehmendes Verhalten“ zeigen.

Sie akzeptierten den (von der „invisible hand“) vorgegebenen Preis. Dies erscheint nur dann sinnvoll, wenn der einzelne keinen entscheidenden Einfluss auf den Markt nehmen kann (z.B. Landwirte).

Jetzt sollen Märkte betrachtet werden, wo eine kleine Zahl von Firmen im Wettbewerb stehen. solche Märkte nennt man *Oligopole*.

Wir betrachten das folgende einfache Modell:

Gegeben seien k Produzenten, welche den Markt eines bestimmten Gutes (welches hier als beliebig teilbar angenommen wird) alleine kontrollieren.

Das Verhalten der Masse der Konsumenten lässt sich beschreiben durch eine stetige, monoton fallende *inverse Nachfragefunktion*

$$p = f(x)$$

die zu jeder Menge x des Gutes den Preis p angibt, bei dem gerade die Menge x nachgefragt wird.

Die k Oligopolisten bieten nun gleichzeitig und unabhängig voneinander (Kartellgesetze verbieten Absprachen) je eine gewisse Menge des Gutes auf dem Markt an; der Oligopolist i die Menge x_i. Der Preis bestimmt sich dann so, dass gerade die Gesamtmenge $\sum_i x_i$ abgenommen wird, also $p = f(\sum_i x_i)$.

Der Erlös für den Oligopolisten ist $x_i \cdot f(\sum_i x_i)$.

$K_i(x_i)$ seien die Kosten, welche dem Oligopolisten i bei der Herstellung der Menge x_i entstehen.

Der Gewinn des Oligopolisten i beträgt demnach

$$a_i(x_1, \dots, x_k) = x_i \cdot f(\sum_i x_i) - K_i(x_i)$$

10.1 Beispiel (Monopol). Im Fall $k = 1$ spricht man von einem *Monopol* (diese sind meist staatlich). Hier ist der Gewinn des Monopolisten

$$a(x) = xf(x) - K(x)$$

mit z.B. $x \in \mathbb{R}_+$ oder $x \in [0, l]$, wobei l die Kapazitätsgrenze darstellt.

Der „Grenzgewinn“[12] ist

$$a'(x) = xf'(x) + f(x) - K'(x)$$

falls f und K differenzierbar sind.

Setzt man

$$\begin{aligned} f' &< 0 && \text{(wachsendes Angebot liefert fallenden Preis)} \\ f'' &\leqq 0 && (f \text{ konkav}) \\ \text{und } K'' &\geqq 0 && (K \text{ konvex}) \end{aligned}$$

[12]Dies ist eine Bezeichnung der Ökonomen.

voraus, so ergibt sich eine Situation wie in folgender Skizze :-)

Es folgt

$$a''(x) = \underbrace{x}_{\geqq 0} \underbrace{f''(x)}_{\leqq 0} + 2 \underbrace{f'(x)}_{<0} - \underbrace{K''(x)}_{\geqq 0} < 0$$

d.h. a ist streng konkav; die optimale Produktion ergibt sich wenn der Grenzgewinn gleich null ist. Falls $a'(0) \leqq 0$ ($\Leftrightarrow f(0) \leqq K'(0)$), so führt jede Produktion zu einem Verlust.

Spezialfall (Cournot):
$p = f(x) = \max\{a - bx, 0\} =: (a - bx)^+$, mit $a > 0,\ b > 0$.

Es ergibt sich $a(x) = x(a - bx)^+$, und für $x < \frac{a}{b}$ weiterhin $a'(x) = a - 2bx$. Folglich ergibt sich die optimale Produktion bei $x^* = \frac{a}{2b}$, und $p^* = a - bx^* = \frac{a}{2}$.

Interpretation von Cournot: Der Monopolist ist der Besitzer einer Mineralquelle, es entstehen keine Produktions- und Vertriebskosten, d.h. $K \equiv 0$. ◇

Ein Oligopol kann als ein „nichtkooperatives k-Personenspiel“ interpretiert werden.

10.2 Definition. Ein *nichtkooperatives k-Personenspiel*

$$\Gamma = (X_1, \dots, X_k; a_1, \dots, a_k)$$

ist gegeben durch k nichtleere Mengen $X_1, \dots, X_k$, die Strategiemengen der Spieler, und durch reelle Funktionen $a_i : X_1 \times \dots \times X_k \to \mathbb{R}$, die Auszahlungsfunktionen. Ein Tupel $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ heißt *Cournot-Nash-Gleichgewicht,* wenn für alle i und $x_i \in X_i$ gilt:

$$a_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_k^*) \geqq a_i(x_1^*, \dots x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_k^*)$$

10.3 Satz von Nikaido-Isoda

10.3 Satz. *Sei Γ ein nichtkooperatives k-Personenspiel (Bezeichnungen wie oben). Für jedes i gelte folgendes:*

i) X_i ist eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge eines euklidischen Raumes.

ii) a_i ist stetig, und jede Funktion

$$x_i \mapsto a_i(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_k) \quad y_j \in X_j,\ j \neq i$$

ist quasikonkav.

Dann besitzt Γ ein Cournot-Nash-Gleichgewicht.

Beweis. Man setze $S^i := X_i, \Psi^i(x_1, \dots, x_k) = X_i$ und $\nu^i(y, x_i) = a_i(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_k)$ im Satz von Arrow-Debreu-Nash 8.17. □

10.4 Beispiel (Duopole). Ein Oligopol mit $k = 2$ Produzenten heißt *Duopol*.
Für eine Abbildung $\alpha : X_2 \to X_1$ mit

$$a_1(\alpha(x_2), x_2) = \max_{x_1 \in X_1} a_1(x_1, x_2)$$

heißt der Graph von α *Reaktionskurve* der Firma 1 (Analog für $\beta : X_1 \to X_2$).
Offensichtlich ist $(x^*, y^*) \in X_1 \times X_2$ ein Cournot-Nash-Gleichgewicht, falls

$$x^* = \alpha(y^*), \quad y^* = \beta(x^*)$$
$$x^* = \alpha(\beta(x^*)), \quad y^* = \beta(\alpha(y^*))$$

Sonderfall (Cournot):
2 Besitzer von Mineralquellen:

$$f(x) = (a - bx)^+, \quad K_1 = K_2 \equiv 0$$

ergibt:

$$a_1(x_1, x_2) = x_1\big(a - b(x_1 + x_2)\big)^+$$

und für $x_1 + x_2 < \frac{a}{b}$ erhält man nach einer kleinen Rechnung als Cournot-Nash-Gleichgewicht

$$x_1 = \frac{a}{3b}, \qquad x_2 = \beta(x_1) = \frac{a}{3b}$$

Als Gewinn ergibt sich in diesem Fall $a_1(x_1^*, x_2^*) = \frac{a^2}{9b} = a_2(x_1^*, x_2^*)$ sowie $p^* = \frac{a}{3}$. ◊

10.4 Das Stackelberg'sche Führer-Folger-Prinzip

Das Prinzip unterstellt, dass ein Duopolist j (oBdA $j = 1$) der „Führer" ist, und der andere der „Folger".
Der Führer legt seine Produktionsstrategie x_1 fest unter der Annahme, dass der Folger x_2 aufgrund seiner Reaktionskurve wählt, d.h. $x_2 = \beta(x_1)$. Dann gilt

$$a_1(x_1, x_2) = a_1(x_1, \beta(x_1)) =: \tilde{a}_1(x_1)$$

Der Duopolist 1 maximiert sinnvollerweise $\tilde{a}_1$ mit x_1^* und der Folger wählt $x_2^* = \beta(x_1^*)$.
Diese Lösung (x_1^*, x_2^*) heißt *Stackelberg-Gleichgewicht*.
In obigem Sonderfall ergibt sich $x_1^* = \frac{a}{2b}$ und $x_2^* = \frac{a}{4b}$, sowie $p^* = \frac{a}{4}$. Der Wert der Auszahlungsfunktion beträgt $\frac{a^2}{8b}$ bzw. $\frac{a^2}{16b}$.

10.5 Satz von Wald

10.5 Satz. *Gegeben sei ein Oligopolspiel mit $X_i = [0, l_i]$, $l_i > 0$ (hier ist l_i die* Produktionskapazität*) und*

$$a_i(x_1, \dots, x_k) = x_i f(\sum_j x_j) - K_i(x_i)$$

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

a) $K_i(x) = K(x)$ mit $K : [0, \max l_i] \to [0, \infty)$.

b) $K' > 0$ und $K'' \geqq 0$ (K ist konvex und monoton steigend).

Es gibt ein $\xi > 0$ mit

c)

$$\xi \leqq \min l_i$$

und

d)

$$\begin{aligned} f(0) &> 0 \\ f(x) &= 0 \quad x \geqq \xi \\ f'(x) &< 0 \quad x \in [0, \xi] \\ f''(x) &\leqq 0 \quad x \in [0, \xi] \end{aligned}$$

(wobei bei 0 die rechtsseitige Ableitung, bei ξ die linksseitige Ableitung betrachtet wird.)

Dann existiert genau ein Cournot-Nash-Gleichgewicht $y^* = (y_1^*, \dots, y_k^*)$, und zwar:
$y^* = 0$ falls $K'(0) > f(0)$;
andernfalls $y_i^* = t^*$ für alle i, wobei t^* die einzige Nullstelle von ψ im Intervall $(0, \frac{\xi}{k})$ ist. Hier ist

$$\psi(t) = f(kt) + tf'(kt) - K'(t)$$

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst:
Ist y^* ein Cournot-Nash-Gleichgewicht, so muss es die im Satz angegebene Form haben.
Setze

$$\varphi_i(x_i) := a_i(y_1^*, \dots, x_i, \dots, y_k^*) \quad (= x_i f(x_i + \sum_{j \neq i} y_j^*) - K(x_i))$$

Dann ist y^* ein Cournot-Nash-Gleichgewicht genau dann wenn

$$\varphi_i(y_i^*) = \max_{x_i \in X_i} \varphi_i(x_i) \qquad \text{für alle } i \text{ gilt.}$$

Es muss $\sum_j y_j^* \leqq \xi$ gelten, denn:
Aus $\sum y_j^* > \xi$ folgt $p = f(\sum y_j^*) = 0$, was wiederum $\varphi_i(y_i^*) = -K(y_i^*) < -K(x_i) = \varphi_i(x_i)$ zur Folge hätte (wobei $x_i < y_i^*$ ist, so dass immer noch $x_i + \sum_{j \neq i} y_j^* > \xi$ gilt; die Ungleichung folgt, weil K streng monoton wachsend ist). Das wäre ein Widerspruch zur Maximierungseigenschaft eines Cournot-Nash-Gleichgewichts.

Für $x_i \in [0, \xi - \sum_{j\neq i} y_j^*]$ existiert $\varphi_i''(x_i)$ und es gilt

$$\varphi_i'(x_i) = f(x_i + \sum_{j\neq i} y_j^*) + x_i f'(x_i + \sum_{j\neq i} y_j^*) - K'(x_i) \tag{10.1}$$

$$\varphi_i''(x_i) = 2\underbrace{f'(x_i + \sum_{j\neq i} y_j^*)}_{<0} + x_i \underbrace{f''(x_i + \sum_{j\neq i} y_j^*)}_{\leqq 0} - \underbrace{K''(x_i)}_{\geqq 0} < 0 \tag{10.2}$$

Es ist $\varphi_i(0) = -K(0) \leqq 0$ und

$$\varphi_i'(\xi - \sum_{j\neq i} y_j^*) = \underbrace{f(\xi)}_{=0} + \underbrace{(\xi - \sum_{j\neq i} y_j^*)}_{\geqq 0}\underbrace{f'(\xi)}_{<0} - \underbrace{K'(\xi - \sum_{j\neq i} y_j^*)}_{>0} < 0$$

Für $x_i \in (\xi - \sum_{j\neq i} y_j^*, l_i)$ ist

$$\varphi_i(x_i) = -K(x_i)$$
$$\varphi_i'(x_i) = -K'(x_i) < 0 \tag{10.3}$$
$$\varphi_i''(x_i) = -K''(x_i) \leqq 0 \tag{10.4}$$

Fall 1: $K'(0) \geqq f(0)$. Hier gilt

$$\varphi_i'(0) = f(\sum_{j\neq i} y_j^*) - K'(0) \underset{f'|_{[0,\xi]}<0}{\leqq} f(0) - K'(0) \leqq 0$$

Mit (10.2) und (10.3) folgt, dass φ_i streng monoton fallend auf $[0, l_i]$ ist. Folglich ist $y^* = 0$ die einzige Lösung des Maximierungsproblems, d.h. das einzige Cournot-Nash-Gleichgewicht.

Fall 2: Gelte $K'(0) < f(0)$.
Wäre $y^* = 0$, so folgt aus (10.1):

$$\varphi_i'(0) = f(0) - K'(0) > 0$$

ein Widerspruch (da in diesem Fall φ_i bei 0 kein Maximum annimmt).

Sei also $y_l^* > 0$ für ein l. Dann gilt

$$0 = \varphi_l'(y_l^*) = f(\sum y_j^*) + \underbrace{y_l^* f'(\sum y_j^*)}_{<0} - K'(y_l^*) < f(\sum y_j^*) - K'(0)$$

Wäre ein $y_i^* = 0$, so könnte man folgern

$$0 < f(\sum y_j^*) - K'(0) \underset{(10.1)}{=} \varphi_i'(0)$$

Das steht im Widerspruch zu $\varphi_i'(0) \leqq 0$, was für ein Maximum von φ_i bei 0 nötig wäre. Also ist $y_i^* > 0$ für alle i. Nun gilt

$$0 = \varphi_i'(y_i^*) = f(\sum y_j^*) + y_i^* f'(\sum y_j^*) - K'(y_i^*) \tag{10.5}$$

folglich

$$(y_i^* - y_l^*)\underbrace{f'(\sum y_j^*)}_{<0} = K'(y_i^*) - K'(y_l^*)$$

Falls nun $y_i^* > y_l^*$ gelten würde, hätten wir einen Widerspruch zu $K'' \geqq 0$, also

$$y_1^* = \cdots = y_k^* =: t^*$$

Die Bedingung $t^* \leqq \frac{\xi}{k}$ folgt sofort aus

$$kt^* = \sum y_j^* \leqq \xi$$

Aus Gleichung (10.5) erhalten wir nun

$$\psi(t^*) := f(kt^*) + t^* f'(kt^*) - K'(t^*) = 0$$

Wir haben

$$\psi(0) = f(0) - K'(0) > 0$$
$$\psi\left(\frac{\xi}{k}\right) = \underbrace{f(\xi)}_{=0} + \underbrace{\frac{\xi}{k} f'(\xi)}_{<0} - \underbrace{K'\left(\frac{\xi}{k}\right)}_{>0} < 0$$
$$\psi'(x) = \underbrace{kf'(kx)}_{<0} + \underbrace{kxf''(kx)}_{\leqq 0} + \underbrace{f'(kx)}_{<0} - \underbrace{K''(x)}_{\geqq 0} < 0 \quad \text{für } x < \frac{\xi}{k}$$

Das zeigt, dass ψ genau eine Nullstelle auf $[0, \frac{\xi}{k}]$ hat.

2. Für Fall 1 sind beide Richtungen klar. Also nehmen wir $K'(0) < f(0)$ an. Wir haben oben allgemein gesehen, dass ψ eine Nullstelle t^* in $(0, \frac{\xi}{k})$ hat und behaupten, dass $y^* = t^* e$ ein Cournot-Nash-Gleichgewicht ist.

   Zunächst haben wir, dass $\sum y_j^* < \xi$ ist. Mit (10.3) können wir schließen, dass ein Maximum z_i^* von φ_i in $[0, \xi - (k-1)t^*]$ liegen muss. Es gilt:

   $$\varphi_i'(0) = f((k-1)t^*) - K'(0) \underset{f'<0, K''\geqq 0}{>} f(kt^*) + t^* f'(kt^*) - K'(t^*) = \psi(t^*) = 0$$

   Daher gilt $z_i^* > 0$, und nach (10.2) ist z_i^* die eindeutig bestimmte einzige Nullstelle von φ_i'. Wegen $\varphi_i'(t^*) = \psi(t^*) = 0$ folgt $z_i^* = t^*$.

   Das zeigt, dass t^* die Funktion φ_i maximiert, also ist y^* ein Cournot-Nash-Gleichgewicht. □

Literatur zu Kapitel 10: [**Au**] zu 10.4; [**SF**] J. Szép und F. Forgó H. Deutsch (1983) zum Satz von Wald (hier wird auch der Mehrgüterfall behandelt)

11 Kooperatives Verhalten

Die bisher betrachteten Modelle waren rein „kompetitiv“, d.h. das wettbewerbsmäßige Verhalten der Marktteilnehmer stand im Vordergrund. In diesem Abschnitt soll nun auch Kooperation erlaubt sein, und deren Konsequenzen sollen untersucht werden. Wie in Kapitel 9 gehen wir von einer P-Ökonomie aus:

$$\mathcal{P} = \left((X^i, \succeq^i, a^i), (\theta_{ij}), (Y^j)\right)_{i\in M}^{j\in K}$$

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Aktionsbereiche Y^j der Produzenten konvex sind, und dass $0 \in Y^j$ gilt; d.h. es ist erlaubt, nichts zu produzieren.

Der Konsument i verfügt über den Anteil θ_{ij} an der Produktionsstätte j, er kann also dort Güterbündel aus der Menge $\theta_{ij}Y^j$ produzieren. Es gilt dann $\theta_{ij}Y^j \subset Y^j$ wegen $0 \in Y^j$ und der Konvexität von Y^j sowie

$$\bigoplus_{i\in M} \theta_{ij} Y^j = Y^j \tag{11.1}$$

Eine Teilmenge S von M heiße *Koalition.* Jede nichtleere Koalition definiert wie folgt eine Teilökonomie

$$\mathcal{P}_S := \left((X^i, \succeq^i, a^i), (\theta_{S,ij}), (Y^j_S)\right)_{j\in K}^{i\in S}$$

mit

$$Y^j_S := \bigoplus_{i\in S} \theta_{ij} Y^j$$

$$\theta_{S,ij} := \frac{\theta_{ij}}{\sum_{k\in S}\theta_{kj}} \qquad \text{falls } \sum_{k\in S}\theta_{kj} > 0$$

$$\theta_{S,ij} := \frac{1}{|S|} \qquad \text{falls } \sum_{k\in S}\theta_{kj} = 0$$

Ferner schreiben wir $a_S := \sum_{i\in S} a^i$.

11.1 Definition. Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_S$ für eine nichtleere Teilmenge S von M definiert wie oben. Ferner sei

$$A_S := \left\{(x,y) \in \prod_{i\in S} X^i \times \prod_{j\in K} Y^j_S : \sum_{i\in S} x^i \leqq \sum_{j\in K} y^j + a_S\right\}$$

die Menge der verschiedenen Aktionen in der Koalition S.

a) Eine Allokation (Gesamtaktion) $(x,y) \in A := A_M$ heißt durch die Koalition S *blockierbar,* wenn es ein $(\tilde{x},\tilde{y}) \in A_S$ gibt mit $\tilde{x}^i \succ^i x^i$ für alle $i \in S$.

b) Die Menge $C(\mathcal{P})$ aller $(x,y) \in A$, welche durch keine Koalition S blockierbar sind, heißt das *Core (bzw. der Kern)* von $\mathcal{P}$.

Wenn der Begriff „Gleichgewicht“ von $\mathcal{P}$ eine stabile Situation beschreibt, so sollte man annehmen, dass für jedes Gleichgewicht $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ die Aktion $(\bar{x},\bar{y})$ im Core liegt.

Ist nämlich $(\bar{x},\bar{y})$ von S blockierbar, so besteht für die Koalition S der Anreiz, autark zu agieren, wo dann durch die Wahl eines $(\tilde{x},\tilde{y}) \in A_S$ mit $\tilde{x}^i \succ^i x^i$ sich jeder Konsument $i \in S$ besser stellen kann.

11.2 Satz (⊛). *Ist $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ ein Gleichgewicht in der $\mathcal{P}$-Ökonomie $\mathcal{P}$, so liegt $(\bar{x},\bar{y})$ im Core von $\mathcal{P}$.*

Beweis. Sei $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})$ ein Gleichgewicht. Angenommen, es existiert eine nichtleere Koalition S, so dass es ein $(\tilde{x},\tilde{y}) \in A_S$ mit $\tilde{x}^i \succ^i \bar{x}^i$ für alle $i \in S$ gibt.

Sei $\alpha_j := \sum_{i\in S}\theta_{ij}$. Analog zu (11.1) können wir $Y^j_S = \alpha_j Y^j$ schließen. Nun gilt (für alle $j \in K$)

$$\bar{p}^t\tilde{y}^j \leqq \alpha_j \bar{p}^t \bar{y}^j \tag{11.2}$$

im Falle $\alpha_j = 0$ trivialerweise; andernfalls folgt diese Ungleichung wegen

$$\bar{p}^t \underbrace{\frac{\tilde{y}^j}{\alpha j}}_{\in \frac{1}{\alpha_j}Y^j_S = Y^j} \leqq \sup_{y^j\in Y^j} \bar{p}^t y^j \underset{\text{(nach Def.)}}{=} \bar{p}^t\bar{y}^j$$

Nun schließen wir

$$\begin{aligned}\bar{p}^t \sum_{i\in S}\tilde{x}^i &\underset{\text{wg. } (\tilde{x},\tilde{y})\in A_S}{\leqq} \bar{p}^t a_S + \sum_{j\in K}\bar{p}^t\tilde{y}^j \underset{(11.2)}{\leqq} \bar{p}^t a_S + \sum_{j\in K}\alpha_j\bar{p}^t\bar{y}^j \\ &= \bar{p}^t a_S + \sum_{j\in K}\sum_{i\in S}\theta_{ij}\bar{p}^t\bar{y}^j = \bar{p}^t a_S + \sum_{j\in K}\sum_{i\in S}\theta_{ij}\rho^j(\bar{p}) \\ &= \sum_{i\in S} r^i(\bar{p})\end{aligned}$$

Es muss aber $\tilde{x}^i \notin B^i(\bar{p})$ für alle $i \in S$ gelten, da $\bar{x}^i$ als Gleichgewichtspunkt maximal in $B^i(\bar{p})$ ist. Damit ist $\bar{p}^t\tilde{x}^i > r^i(\bar{p})$ für alle $i \in S$ und wir haben einen Widerspruch zu der eben hergeleiteten Ungleichung erreicht. □

11.3 Beispiel (Das Core in der Edgeworthbox). Gegeben sei die Situation $\mathcal{P} = \mathcal{E}$ aus Beispiel 4.6, d.h. $m = n = 2$, $X^i = \mathbb{R}^2_+$, die Präferenzordnungen $\succeq^i$ seien (streng) monoton und $k = 1$, $Y^1 = \{0\}$. Ein $\bar{x}$ ist im Core von E, wenn $\bar{x} \in A$ ist und wenn es zu $\emptyset \neq S \subset \{1,2\}$ kein $\tilde{x} \in A_S$ gibt mit $\tilde{x}^i \succ^i \bar{x}^i$ für alle $i \in S$.

Für $S = \{1,2\}$ heißt das: Es darf kein $\tilde{x} = (\tilde{x}^1,\tilde{x}^2)$ geben mit $\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2 \leqq a^1 + a^2$ und $\tilde{x}^i \succ^i \bar{x}^i$.
Das heißt: $\bar{x}$ muss Pareto-optimal sein.

Für $S = \{i\}$: Es darf kein $\tilde{x}^i$ geben mit $\tilde{x}^i \leqq a^i$ und $\tilde{x}^i \succ^i \bar{x}^i$. Dies ist äquivalent zu der Aussage

$$\tilde{x}^i \leqq a^i \Rightarrow \tilde{x}^i \preceq^i \bar{x}^i$$

was wiederum äquivalent ist zu $a^i \preceq^i \bar{x}^i$.

Also besteht das Core aus denjenigen Punkten auf der Kontraktkurve (Pareto-Optima), welche von beiden Konsumenten gegenüber den Anfangsausstattungen bevorzugt werden (vgl. Skizze (4.1)). ◇

Wir wollen nun noch eine Querverbindung zur Theorie der kooperativen Spiele herstellen und gehen aus von der folgenden Definition:

11.4 Definition. Ein *kooperatives m-Personenspiel* ist eine Abbildung $W : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{R}_+$ (mit $M := \{1,\dots,m\}$) mit

i) $W(\emptyset) = 0$

ii) $W(S) + W(T) \leqq W(S \cup T)$ für alle disjunkten $S, T \subset M$. (W ist superadditiv.)

Die Teilmengen $S \subset M$ heißen Koalitionen.

Mit $\mathcal{S}_m$ bezeichnen wir die Menge aller solchen Spiele.

Interpretation: $W(S)$ ist der *Nutzen* der Koalition S.

Bedingung (i) ist technischer Natur, um Fallunterscheidungen zu vermeiden.

Bedingung (ii) bedeutet: Schließen sich zwei Koalitionen S und T, welche keine gemeinsamen Mitglieder haben, zur Koalition $S \cup T$ zusammen, so ist ihr Gesamtnutzen mindestens so groß wie die Summe der Einzelnutzen (Synergie).

11.5 Definition. Für ein $W \in \mathcal{S}_m$ heißt

$$C(W) = \left\{ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)^t : \sum_{i \in M} \mu_i = W(M), \sum_{i \in S} \mu_i \geqq W(S) \text{ für alle } S \subset M \right\}$$

das *Core* von W.

Interpretation: Spieler i erhält den Betrag μ_i. Dabei wird der Nutzen $W(M)$ der großen Koalition M aufgeteilt und die Mitglieder jeder Koalition S erhalten zusammen mindestens den Nutzen $W(S)$ ausbezahlt.

Es besteht also für keine Koalition S der Anreiz, aus der (großen) Koalition auszuscheren, da ihr dies lediglich den kleineren Gewinn $W(S)$ einbrächte.

11.6 Beispiel. Ein Parlament besteht aus 4 Parteien. Die Parteien 1, 2, 3 und 4 verfügen über 15%, 20%, 30%, bzw. 35% der Mandate.

Für eine Abstimmung (z.B. Verfassungsänderung) sei eine 3/4-Mehrheit erforderlich.

Ordnet man jeder Koalition S den Nutzen 1 bzw. 0 zu, je nachdem, ob sie über die erforderliche Mehrheit verfügt oder nicht, d.h.

$$W(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S \in \{\{1,2,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so wird hierdurch ein kooperatives 4-Personenspiel definiert.

Das Core von W ist die Lösungsmenge des folgenden Ungleichungssystems:

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= 1 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &\geqq 1 \\ \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &\geqq 1 \\ \mu_1 \quad + \mu_3 + \mu_4 &\geqq 1 \\ \sum_{i \in S} \mu_i &\geqq 0 \quad \text{für alle } S \text{ mit } W(S) = 0 \end{aligned}$$

Nun sieht man schnell, dass

$$C(W) = \{(0, 0, \mu_3, \mu_4) : \mu_3 \geqq 0, \mu_4 \geqq 0, \mu_3 + \mu_4 = 1\}$$

ist. ◊

11.7 Bemerkung. Es gibt Spiele mit leerem Core. Vergleiche Übung 47.

11.8 Definition. Ein Spiel $W \in \mathcal{S}_m$ heißt *balanciert,* wenn gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j W(S_j) \leqq W(M) \quad \text{für alle } \alpha_j \geqq 0, S_j \subset M = \{1, \ldots, m\} \text{ mit } \sum \alpha_j \chi_{S_j} = \chi_M$$

wobei $\chi_A(i) = 1$, falls $i \in A$, sonst 0. Die letzte Gleichung kann man auch schreiben als

$$\forall i \sum_{\{j : i \in S_j\}} \alpha_j = 1$$

11.9 Satz von Bondareva-Shapley

11.9 Satz. *Ein Spiel $W \in \mathcal{S}_m$ hat genau dann nichtleeres Core, wenn es balanciert ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)^t \in C(W)$, und seien α_j, S_j im Sinne der obigen Definition gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j W(S_j) &\leqq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \sum_{i \in S_j} \mu_i = \sum_j \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \mu_i \chi_{S_j}(i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i \underbrace{\sum_j \alpha_j \chi_{S_j}(i)}_{=1} = \sum \mu_i = W(M) \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: (⊛) Sei $\mathcal{P}(M) = \{S_1, \ldots, S_{2^m}\}$, und oBdA gelte $W(M) = 1$. Setze

$$\alpha_{ij} = \chi_{S_j}(i) - W(S_j) \qquad i \leqq m, j \leqq 2^m$$

Für die Matrix $A = (\alpha_{ij})$ gibt es nach dem Hauptsatz der Spieltheorie 2.3 ein $\bar{x} \in \mathbb{P}^m$ und ein $\bar{y} \in \mathbb{P}^{2^m}$ mit

$$x^t A \bar{y} \leqq \bar{x}^t A y \quad \text{für alle } x \in \mathbb{P}^m, \ y \in \mathbb{P}^{2^m} \tag{11.3}$$

Wir wollen einsehen, dass $A\bar{y}$ einen nichtnegativen Eintrag i_0 hat. Dann gilt wegen (11.3)

$$\bar{x}^t A y \geqq (e^{i_0})^t A \bar{y} = (A\bar{y})_{i_0} \geqq 0 \tag{11.4}$$

Es gilt

$$(A\bar{y})_i = \left(\sum_j \bar{y}_j \chi_{S_j}(i) \right) - \sum_j \bar{y}_j W(S_j)$$

Also müssen wir zeigen:

$$\sum_j \bar{y}_j W(S_j) \leqq \max_{i \leqq m} \left(\sum_j \bar{y}_j \chi_{S_j}(i) \right) =: \alpha > 0 \tag{11.5}$$

Zunächst ist klar, dass $\sum_j \bar{y}_j \chi_{S_j} \leqq \alpha \chi_M$ gilt.

Setze $z_j = 0$ falls $|S_j| \neq 1$, und $z_{j_0} = \alpha - \sum_{i_0 \in S_j} \bar{y}_j$ für $S_{j_0} = \{i_0\}$.

Nun gilt $\sum_j (\bar{y}_j + z_j) \chi_{S_j} = \alpha \chi_M$ und

$$\frac{1}{\alpha} \sum \bar{y}_j W(S_j) \leqq \sum \frac{\bar{y}_j + z_j}{\alpha} W(S_j)$$

woraus mit der Balanciertheit

$$\sum \frac{\bar{y}_j + z_j}{\alpha} W(S_j) \leqq W(M) = 1$$

folgt. Das zeigt (11.5).

Jetzt ergibt sich für $y = e^j$ in (11.4):

$$W(S_j) \leqq W(S_j) + (\bar{x}^t A)_j = W(S_j) + \sum_i \bar{x}_i \left(\chi_{S_j}(i) - W(S_j) \right) = \sum_{i \in S_j} \bar{x}_i$$

Wegen $\sum_i \bar{x}_i = 1 = W(M)$ ist $\bar{x} \in C(W)$. □

11.10 Satz. *Sei* $\mathcal{E} = (X^i, \succeq^i, a^i)_{i \in M}$ *(mit* $M = \{1, \dots, m\}$*) eine reine Tauschökonomie mit folgenden Eigenschaften:*

i) Alle X^i *sind konvex, abgeschlossen, und nach unten beschränkt.*

ii) Die Präferenzstrukturen seien Präferenzordnungen $\succeq^i$*, gegeben durch nach oben halbstetige konkave Nutzenfunktionen* $u^i : X^i \to \mathbb{R}_+$.

iii) Für jedes nichtleere $S \subset M$ *sei*

$$A_S := \Big\{ x \in \prod_{i \in S} X^i : \sum_{i \in S} x^i \leqq a_S \Big\} \neq \emptyset$$

Dann wird durch

$$W_{\mathcal{E}}(\emptyset) = 0 \quad \text{und} \quad W_{\mathcal{E}}(S) = \max \Big\{ \sum_{i \in S} u^i(x^i) : (x^i)_{i \in S} \in A_S \Big\}$$

ein kooperatives Spiel $W_{\mathcal{E}} \in \mathcal{S}_m$ *definiert, und* $C(W) \neq \emptyset$.

Beweis. 1. X^i ist nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein b^i mit $b^i \leqq x^i$ für alle $x^i \in X^i$.

Wenn $(x^i)_{i \in S} \in A_S$ ist, so gilt

$$b_i \leqq x^i \leqq a_S - \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in S}} x^j \leqq a_S - \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in S}} b^j$$

Das heißt, die A_S sind beschränkt. Da sie auch abgeschlossen sind (wie man sich schnell überlegt), sind sie kompakt.

Die u^i sind ohs. Daher nimmt $\sum u^i$ auf A_S ein Maximum an, und $W_{\mathcal{E}}$ ist wohldefiniert.

2. Aus $A_S \times A_T \subset A_{S \cup T}$ für disjunkte S, T folgt $W_{\mathcal{E}} \in \mathcal{S}_m$.

3. Nach dem vorherigen Satz genügt es zu zeigen, dass $W = W_{\mathcal{E}}$ balanciert ist, d.h. es ist

$$\sum_{S \subset M} \mu_S W(S) \leqq W(M)$$

für $\sum_{S \subset M} \mu_S \chi_S = \chi_M$ und nichtnegative μ_S nachzuweisen.

Hierzu wählen wir für jedes nichtleere $S \subset M$ Elemente $x^{i,S} \in X^i$ (für $i \in S$) mit

$$W(S) = \sum_{i \in S} u^i(x^{i,S}) \quad \text{und} \quad \sum_{i \in S} x^{i,S} \leqq a_S$$

(beachte, dass dies nach Voraussetzung und Schritt 1 möglich ist).

Da wir $\sum_{S \subset M} \mu_S \chi_S(i) = 1$ annehmen, folgt

$$z^i := \sum_{S \subset M} \mu_S \chi_S(i) x^{i,S} \in \operatorname{conv} \big\{ x^{i,S} : S \subset M \big\} \subset X^i$$

Da u^i konkav ist, erhalten wir

$$u^i(z^i) \geqq \sum_{S \subset M} \mu_S \chi_S(i) u^i(x^{i,S})$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset M} \mu_S W(S) &= \sum_{S \subset M} \mu_S \sum_{i \in M} \chi_S(i) u^i(x^{i,S}) \\ &\leqq \sum_{i \in M} u^i(z^i) \leqq W(M) \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung reicht es (nach Definition), nachzurechnen, dass $\sum z^i \leqq a_M$ ist. Das sehen wir wie folgt:

$$\sum_{i \in M} z^i = \sum_{S \subset M} \mu_S \underbrace{\sum_{i \in S} x^{i,S}}_{\leqq a_S = \sum_{i \in M} \chi_S(i) a^i} \leqq \sum_{i \in M} \underbrace{\sum_{S \subset M} \mu_S \chi_S(i)}_{= \chi_M(i) = 1} a^i = \sum_{i \in M} a^i = a_M \qquad \square$$

Literatur

[**Ar**] K.J. Arrow, Social Choice and Individual Values, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, Monograph 12, 6, Aufl. 1973

[**AH**] K.J. Arrow und F.H. Hahn, General Competitive Analysis, North Holland, 4. Aufl. 1986

[**Au**] J.P. Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, North Holland, 2. Aufl. 1982

[**De**] G. Debreu, Theory of Value, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, Monograph 17, 1959

[**Fe**] G. Fees, Mikroökonomie, Metropolis 1997

[**Fi 1**] P.C. Fishburn, Mathematics of Decision Theory Mouton, The Hague 1972

[**Fi 2**] P.C. Fishburn, Utility Theory for Decision Making, R.E. Krieger, 1979

[**Hi**] W. Hildenbrand, Core and Equilibria of a Large Economy, Princeton Univ. Press 1974

[**HK**] W. Hildenbrand und A.P. Kirman, Introduction to Equilibrium Analysis, North Holland 1976

[**Ich**] T. Ichiishi, Game Theory for Economic Analysis, Academic Press, 1983

[**Ka 1**] S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics I, Addison–Wesley 1959

[**Ka 2**] S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics II, Addison–Wesley 1959

[**KN**] H. König und M. Neumann, Mathematische Wirtschaftstheorie mit einer Einführung in die Konvexe Analysis, A. Hain 1986

[**Ke**] J.S. Kelly, Arrow Impossibility Theorems, Acad. Press 1978

[**Moe**] O. Moeschlin, Zur Theorie von Neumannscher Wachstumsmodelle, Lecture Notes in Economics and Math. Systems 96, Springer 1974

[**Ni 1**] H. Nikaido, Convex Structures and Economic Theory, Acad. Press 1968

[**Ni 2**] H. Nikaido, Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics, North–Holland 1970

[**Ro 1**] Rosenmüller, Kooperative Spiele und Märkte, Lecture Notes in Operations Research and Math. Systems 53, Springer 1971

[**Ro 2**] J. Rosenmüller, The Theory of Games and Markets, North–Holland 1981

[**Va**] H.R. Varian, Mikroökonomie, Oldenbourg Verlag 1985

[**Yo**] G.W. Yohe, Übungsbuch zu H.R. Varian, Oldenburg, 2. Aufl. 1987

Ein Sammelwerk:
Handbook of Mathematical Economics, Band I, II, III
Herausgeber: K.J. Arrow und M.D. Intrilligator, North Holland 1991