Seminar im Wintersemester 2001/2002
Spezielle Kapitel aus Gruppen- und Darstellungstheorie

Andreas Balser

3. Februar 2002

3. Kapitel

Transformationsgruppen

In meinem Vortrag geht es um Transformationsgruppen und infinitesimale Transformationsgruppen. Wir werden die infinitesimalen Transformationsgruppen als „Differentiale“ von Transformationsgruppen zu verstehen lernen, und untersuchen, in wieweit man für eine infinitesimale Transformationsgruppe eine solche Beschreibungen finden kann.

Aber beginnen wir von vorne:

Die ersten beiden Kapitel findet man in [Wo] und [Mü] (wobei das 1. Kapitel, welches die differentialgeometrischen Grundlagen enthält, auf diese beiden Texte aufgeteilt ist).

Im Folgenden wird G für eine *analytische Gruppe (d.h. eine analytische, zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit analytischer Gruppenstruktur)*, $\mathfrak{g}$ für ihre *Lie-Algebra* und M für eine (beliebige) *analytische Mannigfaltigkeit* stehen.[1] Wenn ein Vektorfeld erwähnt wird, so soll dieses analytisch sein.

[1]Die hier dargestellte Theorie geht auch durch, wenn man im gesamten Text „analytisch“ durch „differenzierbar“ ersetzt. In [Va], meiner Hauptquelle, wird der analytische Fall behandelt, weshalb ich es hier genauso handhabe.

3.1 Topologische Lemmas

In diesem Abschnitt finden sich einige topologische Lemmas, die wir später in den Beweisen brauchen werden.

Lemma 3.1. *Sei K ein kompakter und H ein beliebiger topologischer Raum. Für $x \in H$ und jede Umgebung U von $\{x\} \times K$ in $H \times K$ gibt es eine Umgebung B von x mit $B \times K \subset U$.*

Beweis. Übung. $\square$

Lemma 3.2. *Sei eine stetige Abbildung $f : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten gegeben, sowie eine offene Menge $V \subset N$ und eine Abbildung $h : V \to M$, so dass $f(h(v)) = v$ für alle $v \in V$ gilt, $h(V)$ offen in M ist und h ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Dann ist $h(V)$ eine Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(V)$.*

Beweis. Die Offenheit von $h(V)$ ist gegeben; wir wollen die Abgeschlossenheit „zu Fuß" nachrechnen.

Sei also $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n \in h(V)$ für alle n (insbesondere gilt $h(f(x_n)) = x_n$), die gegen $x \in f^{-1}(V)$ konvergiert. Wir müssen $x \in h(V)$ zeigen. Es gilt $f(x) \in V$, und die Folge $(f(x_n))_n$ konvergiert gegen $f(x)$ (aufgrund der Stetigkeit von f); da h ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, konvergiert $(x_n)_n$ gegen $h(f(x))$. Mit der Eindeutigkeit eines Grenzwerts folgt $x = h(f(x)) \in h(V)$. $\square$

Wir benötigen auch einige Ergebnisse über offene Überdeckungen von Mannigfaltigkeiten:

Definition 3.3. Eine Familie $\mathcal{O}$ von Teilmengen einer Mannigfaltigkeit M heißt *offene Überdeckung von M,* falls alle $O \in \mathcal{O}$ offen sind und gilt:

$$M \subset \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O$$

Eine offene Überdeckung $\mathcal{O}$ heißt *lokal endlich,* wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung hat, die nur endlich viele Mengen aus $\mathcal{O}$ schneidet.

Eine offene Überdeckung $\mathcal{O}'$ heißt *Verfeinerung von $\mathcal{O}$,* falls es zu jeder Menge $U \in \mathcal{O}'$ eine Menge $V \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $U \subset V$ gilt.

Lemma 3.4. *Jede offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit hat eine lokal endliche Verfeinerung.*

Beweis. Das ist [Sp, Ch.2, Th.13]. $\square$

Lemma 3.5 (Verkleinerungslemma). *Jede lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{O}$ einer Mannigfaltigkeit hat eine Verfeinerung $\mathcal{O}'$, so dass es für alle $U \in \mathcal{O}'$ ein $V \in \mathcal{O}$ gibt mit $\bar{U} \subset V$.*

Beweis. Das ist [Sp, Ch.2, Th.14]. □

Lemma 3.6 (für den Beweis von 3.16). *Sei eine lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{O} = \{U_i : i \in I\}$ von M gegeben. Für alle $i, j \in I$ und jedes $p \in U_i \cap U_j$ sei eine Umgebung $U_{ijp} \subset U_i \cap U_j$ von p gegeben. Dann kann man zu jedem $p \in M$ eine Umgebung U_p finden, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

i) *Wenn $p \in U_i \cap U_j$ gilt, so folgt $U_p \subset U_{ijp}$.*

ii) *Wenn der Schnitt $U_p \cap U_q$ nicht leer ist, dann gibt es ein $i \in I$, so dass $U_p \cup U_q \subset U_i$ ist.*

Beweis. Sei $\{V_i : i \in I\}$ die Verfeinerung von $\mathcal{O}$ aus Lemma 3.5 mit $\bar{V}_i \subset U_i$ für alle $i \in I$, sowie U'_p eine Umgebung von p, die nur endlich viele Elemente von $\mathcal{O}$ schneidet. Wir definieren

$$U_p := \underbrace{U'_p \cap \bigcap_{p \in U_i} U_i \cap \bigcap_{p \in V_i} V_i \cap \bigcap_{p \in U_{ijp}} U_{ijp}}_{\text{endlicher Schnitt(!)}} \cap \bigcap_{p \notin \bar{V}_i} (M \backslash \bar{V}_i)$$

Da U'_p nur endlich viele U_i schneidet und $\bar{V}_i \subset U_i$ gilt, leisten nur endlich viele i einen Beitrag zu dem letzten Schnitt, so dass U_p eine Umgebung von p ist.

Eigenschaft (i) ist per definitionem erfüllt. Wir müssen Eigenschaft (ii) nachweisen:

Sei $U_p \cap U_q$ nicht leer. Dann ist $p \in V_i$ für ein $i \in I$, und $U_p \subset V_i$. Damit ist $U_q \cap \bar{V}_i$ nicht leer, was $q \in \bar{V}_i \subset U_i$ zur Folge hat. Nun folgt $U_p \cup U_q \subset U_i$. □

Zuletzt noch ein kleines Lemma über Lie-Gruppen:

Lemma 3.7. *Jede $\mathbf{1}$-Umgebung in einer zusammenhängenden topologischen (d.h. insbesondere einer analytischen) Gruppe G erzeugt die ganze Gruppe.*

Beweis. Wir müssen für eine beliebige $\mathbf{1}$-Umgebung V zeigen, dass $\bigcup_n V^n$ offen und abgeschlossen in G ist.
OBdA sei V symmetrisch[2] (sonst untersuchen wir $V' := V \cap V^{-1}$).

Dann ist klar, dass $H := \bigcup_n V^n$ eine offene Untergruppe von G ist. Ihr Komplement ist $\bigcup_{g \notin H} gH$, also ebenso offen. Daher ist jede offene Untergruppe auch abgeschlossen. □

[2] d.h. $V = V^{-1}$.

3.2 Grundlegendes

Definition 3.8. Eine *lokale G-Transformationsgruppe auf M* oder eine *lokale Wirkung von G auf M* ist eine Abbildung φ von einer Teilmenge D von $G \times M$ nach M mit folgenden Eigenschaften:

i) Der Definitionsbereich D ist eine offene Umgebung von $\{\mathbf{1}\} \times M$ und φ ist analytisch auf D.

ii) Es gilt $\varphi(\mathbf{1}, p) = p$ für alle $p \in M$.

iii) Die maximale Teilmenge E von $G \times G \times M$ auf der φ assoziativ ist, ist eine Umgebung von $\{\mathbf{1}\} \times \{\mathbf{1}\} \times M$.
Das heißt: E ist die Menge all derer Punkte von $G \times G \times M$, für die (h, p), (gh, p) und $(g, \varphi(h, p))$ in D liegen und $\varphi(gh, p) = \varphi(g, \varphi(h, p))$ gilt.

Falls $D = G \times M$ und $E = G \times G \times M$ ist, so nennen wir φ eine *globale G-Transformationsgruppe auf M* oder eine *globale G-Wirkung auf M* (dies ist eine *Wirkung*, wie sie in [Mü, 2.1] definiert wird).

Einen Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in die *Lie-Algebra $\mathcal{X}_a(M)$ der analytischen Vektorfelder auf M* nennen wir *infinitesimale G-Transformationsgruppe* oder *infinitesimale G-Wirkung auf M*.

Für $\varphi(g, p)$ schreiben wir auch $g \cdot p$ (wenn keine Missverständnisse bezüglich φ zu befürchten sind).

Gemäß unseren Definitionen ist die Abbildung

$$\varphi^p : g \mapsto g^{-1} \cdot p \quad (G \to M) \tag{3.1}$$

für jedes p in M definiert und analytisch in einer Umgebung von $\mathbf{1}$. Also können wir

$$\begin{aligned} \tau_\varphi(Y)_p &:= (d\varphi^p)_{\mathbf{1}}(Y) \\ \tau_\varphi(Y)_p f &= Y_{\mathbf{1}}(f \circ \varphi^p) \end{aligned} \tag{3.2}$$

definieren (vgl. [Wo, Def. Differential]). Dann ist $\tau_\varphi(\cdot)_p$ eine lineare Abbildung von $\mathfrak{g}$ nach $T_p(M)$. Untersuchen wir ihre Eigenschaften etwas genauer:

Lemma 3.9. *Für jedes $Y \in \mathfrak{g}$ ist die Abbildung $\tau_\varphi(Y) : p \mapsto \tau_\varphi(Y)_p$ ein analytisches Vektorfeld auf M und die Abbildung $\tau_\varphi : Y \mapsto \tau_\varphi(Y)$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ nach $\mathcal{X}_a(M)$.*

Beweis. Wir verwenden die algebraische Definition eines Tangentialvektors und prüfen, wie $\tau_\varphi(Y)_p$ auf Funktionen wirkt. Nach der Definition eines Differentials wirkt es auf eine Funktion f wie folgt:

$$\tau_\varphi(Y)_p f = (d\varphi^p)_{\mathbf{1}}(Y)(f) = Y_{\mathbf{1}}(f \circ \varphi^p) = Y_{\mathbf{1}}(f(\varphi(g_Y^{-1}, p)))$$

Die Variable g_Y ist hier deshalb so benannt, weil es die Variable ist, auf die sich $Y_\mathbf{1}$ bezieht; da $Y_\mathbf{1}$ eine „Richtungsableitung“ darstellt, muss also g_Y infinitesimal nahe an $\mathbf{1}$ liegen. Hieraus ergibt sich, dass $\tau_\varphi(Y)$ ein analytisches Vektorfeld auf M ist, da φ analytisch in einer Umgebung von $\{\mathbf{1}\} \times M$ ist.

Aus der Definition als Ableitung ergibt sich sofort, dass τ_φ linear in Y ist. Zu zeigen verbleibt:

$$\tau_\varphi([X,Y]) = [\tau_\varphi(X), \tau_\varphi(Y)]$$

Um dies einzusehen, rechnen wir:

$$\begin{aligned}
(\tau_\varphi[X,Y])_p f &= [X,Y]_\mathbf{1}(f \circ \varphi^p) \\
&\underset{1.15}{=} X_\mathbf{1}(Y(f \circ \varphi^p)) - Y_\mathbf{1}(X(f \circ \varphi^p)) \\
[\tau_\varphi(X), \tau_\varphi(Y)]_p f &= \tau_\varphi(X)_p(\tau_\varphi(Y) f) - \tau_\varphi(Y)_p(\tau_\varphi(X) f) \\
\tau_\varphi(X)_p(\tau_\varphi(Y) f) &= \tau_\varphi(X)_p(\underbrace{Y_\mathbf{1}(f \circ \varphi^q)}_{M \to \mathbb{R}}) \\
&= \tau_\varphi(X)_p(Y_\mathbf{1}(f(g_Y^{-1} \cdot q)) \\
&= X_\mathbf{1}(Y_\mathbf{1}(f(g_Y^{-1} \cdot (g_X^{-1} \cdot p)))) \\
&= X_\mathbf{1}(Y_\mathbf{1}(f((g_X g_Y)^{-1} \cdot p))) \\
&= X_\mathbf{1}(Y_\mathbf{1}(f \circ \varphi^p \circ l_{g_X})) \\
&= X_\mathbf{1}(dl_{g_X} Y_\mathbf{1}(f \circ \varphi^p)) \\
&= X_\mathbf{1}(Y_{g_X}(f \circ \varphi^p)) \\
&= X_\mathbf{1}(Y(f \circ \varphi^p))
\end{aligned}$$

Wobei die vorletzte Gleichheit wegen der Linksinvarianz von Y folgt. Hieraus ergibt sich nun die Behauptung. □

Beispiel 3.10. Wenn wir $G = (\mathbb{R}, +)$ und $M = \mathbb{R}^2$ wählen, so kann man sich eine Transformationsgruppe als Schar von Kurven vorstellen: Ausgehend von jedem Punkt in $\mathbb{R}^2$ erhalten wir eine Kurve, aber aufgrund der Assoziativität müssen diese „zusammenpassen“, d.h. übereinstimmen, wenn sie durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Z.B. definieren wir

$$\varphi(t, (c_1, c_2)) = (t + c_1, \sin(t + c_1) + c_2 - \sin(c_1))$$

Man rechnet unmittelbar nach, dass dies eine globale Transformationsgruppe darstellt.

Die Abbildung $\tau_\varphi(\cdot)_{(c_1,c_2)}$ bildet für $s \in \mathbb{R}$ das linksinvariante Vektorfeld $s\frac{\partial}{\partial t}$ auf den Tangentialvektor $(-s, -s\cos(c_1))_{(c_1,c_2)}$ ab (man beachte das Minuszeichen; es wird wegen der Definition von φ^p benötigt). ◊

Wir haben gesehen, wie man aus einer lokalen G-Transformationsgruppe φ eine infinitesimale G-Transformationsgruppe τ_φ erhält.

Man interessiert sich dafür, wie/ob man aus einer infinitesimalen G-Transformationsgruppe eine lokale G-Transformationsgruppe zurückgewinnen kann. Hierzu bedienen wir uns der Produktmannigfaltigkeit $G \times M$.
Sei also $\tau : X \mapsto \tau(X)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ nach $\mathcal{X}_a(M)$, d.h. eine infinitesimale G-Transformationsgruppe.
Für $X \in \mathfrak{g}$ definieren wir nun:

$$\bar{\tau}(X) : (g,p) \mapsto (X_g, \tau(X)_p) \tag{3.3}$$

Dies ist ein analytisches Vektorfeld auf $G \times M$, und offenbar ist die Zuordnung

$$X \mapsto \bar{\tau}(X)$$

ein injektiver Homomorphismus von der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in die Lie-Algebra $\mathcal{X}_a(G \times M)$.
Nun definieren wir noch

$$\mathcal{L}^\tau_{(g,p)} := \{\bar{\tau}(X)_{(g,p)} : X \in \mathfrak{g}\} \tag{3.4}$$

In jedem Punkt (g,p) von $G \times M$ haben wir einen Untervektorraum von $T_{(g,p)}(G \times M)$ definiert (d.h. die Abbildung $\mathcal{L}^\tau : (g,p) \mapsto \mathcal{L}^\tau_{(g,p)}$ ist eine Distribution, vgl. Def. 1.19). Für $X,\ Y \in \mathcal{L}^\tau_{(g,p)}$ gilt (da $\bar{\tau}$ ein Homomorphismus ist) auch $[X,Y] \in \mathcal{L}^\tau_{(g,p)}$. Folglich ist $\mathcal{L}^\tau$ eine $\dim(G)$-dimensionale involutive analytische Distribution auf $G \times M$, und nach dem Frobeniustheorem 1.24 finden wir durch jeden Punkt (g,p) eine maximale zusammenhängende integrale Mannigfaltigkeit $S_{(g,p)}$ von $\mathcal{L}^\tau$; das heißt, dass an jedem Punkt $(g',p') \in S_{(g,p)}$ gilt: $T_{(g',p')}(S_{(g,p)}) = \mathcal{L}^\tau_{(g',p')}$.
Wir beschäftigen uns mit den Eigenschaften von $S_{(g,p)}$. Noch etwas Notation:

Definition 3.11. Wir schreiben l_h für die Linksmultiplikation auf G und λ_h für die „Linksmultiplikation" auf $G \times M$, d.h. $l_h(g) = hg$ und $\lambda_h(g,p) = (hg,p)$ (dann ist λ_h ein analytischer Diffeomorphismus von $G \times M$).
Die Projektion auf die erste bzw. zweite Komponente von $G \times M$ nennen wir p_G bzw. p_M. Weiterhin sei $p_{G,p} := p_G|_{S_{(\mathbf{1},p)}}$.

Lemma 3.12. *Bei obiger Notation gilt:*

a) $\lambda_h(S_{(g,p)}) = S_{(hg,p)}$

b) *Sei φ eine globale G-Transformationsgruppe auf M, so dass $\tau_\varphi = \tau$ gilt. Dann ist für jedes $p \in M$ die Abbildung*

$$\alpha_{\varphi,p} : g \mapsto (g, g^{-1} \cdot p)$$

ein analytischer Diffeomorphismus von G auf $S_{(\mathbf{1},p)}$.

c) *Sei φ eine lokale G-Transformationsgruppe auf M, so dass $\tau_\varphi = \tau$ gilt, und sei $p_0 \in M$. Dann gibt es eine offene zusammenhängende symmetrische Umgebung V von $\mathbf{1}$ und eine offene zusammenhängende Umgebung U von p_0, so dass für alle p in U die Abbildung $\alpha_{\varphi,p}$ ein analytischer Diffeomorphismus von V auf die offene Untermannigfaltigkeit $\alpha_{\varphi,p}(V)$ von $S_{(\mathbf{1},p)}$ ist. Diese enthält $(\mathbf{1},p)$.*

Beweis. a) Das folgt daraus, dass $\mathcal{L}^\tau$ invariant unter allen $d\lambda_h$ ist, denn

$$d\lambda_h(X_g, \tau(X)_p) = (dl_h X_g, \tau(X)_p) \underset{1.30}{=} (X_{hg}, \tau(X)_p) = \bar{\tau}(X)_{(hg,p)}$$

b) Sei φ eine globale G-Transformationsgruppe, so dass $\tau_\varphi = \tau$ gilt. Dann gilt für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $p \in M$:

$$\begin{aligned} (d\alpha_{\varphi,p})_g(X)f &= X_g(f \circ \alpha_{\varphi,p}) \\ &= X_g(f(g_X, g_X^{-1} \cdot p)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

wegen der Assoziativität von φ und der Linksinvarianz von X erhalten wir

$$\begin{aligned} &= (X_g, \tau(X)_{g^{-1} \cdot p})f \\ &= \bar{\tau}(X)_{\alpha_{\varphi,p}(g)} f \end{aligned}$$

Schreiben wir $A_p := \alpha_{\varphi,p}(G)$. Da φ und die Umkehrung $p_{G,p}$ von α analytisch ist, ist $\alpha_{\varphi,p}$ ein analytischer Diffeomorphismus von G auf A_p.
Dann ist A_p eine Untermannigfaltigkeit von $G \times M$, und nach obiger Rechnung ist es eine integrale Mannigfaltigkeit von $\mathcal{L}^\tau$ durch $(\mathbf{1}, p)$. Da A_p und $S_{(\mathbf{1},p)}$ die gleiche Dimension haben, ist A_p eine *offene* Untermannigfaltigkeit von $S_{(\mathbf{1},p)}$. Da $S_{(\mathbf{1},p)}$ zusammenhängend ist, folgt aus Lemma 3.2, dass $A_p = S_{(\mathbf{1},p)}$ gilt (die Abbildung f des Lemmas ist $p_{G,p}$).

Somit ist $\alpha_{\varphi,p}$ ein analytischer Diffeomorphismus von G nach $S_{(\mathbf{1},p)}$.

c) Wählen wir eine offene zusammenhängende symmetrische Umgebung V von $\mathbf{1}$ und eine offene zusammenhängende Umgebung U von p_0, so dass $V \times V \times U \subset E_\varphi$ gilt (denn in der Produkttopologie finden wir eine offene zusammenhängende Umgebung $V' \times V'' \times U \subset E_\varphi$ von $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, p_0)$. Setze $V := V' \cap (V')^{-1} \cap V'' \cap (V'')^{-1}$).

Für $X \in \mathfrak{g},\ g \in V, p \in U$ funktioniert nun die Rechnung und die Argumentation wie in Teil (b). □

Korollar 3.13 (Eindeutigkeit). *Gegeben sei eine infinitesimale G-Transformationsgruppe $\tau : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}_a(M)$.*

a) *Wenn φ_1 und φ_2 zwei globale G-Transformationsgruppen auf M mit $\tau_{\varphi_1} = \tau_{\varphi_2} = \tau$ sind, dann gilt $\varphi_1 = \varphi_2$.*

b) *Wenn φ_1 und φ_2 lokale G-Transformationsgruppen mit $\tau_{\varphi_1} = \tau_{\varphi_2} = \tau$ sind, dann gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ in einer Umgebung von $\{\mathbf{1}\} \times M$.*

Beweis. a) Zunächst nehmen wir an, dass $\varphi_{1/2}$ globale G-Transformationsgruppen sind. Nach 3.12.b gilt $(g^{-1}, \varphi_{1/2}(g,p)) \in S_{(\mathbf{1},p)}$ für alle $g \in G$ und $p \in M$. Ebenfalls nach 3.12.b ist $p_{G,p}$ eine Bijektion von $S_{(\mathbf{1},p)}$ auf G. Das bedeutet, dass $\varphi_1(g,p) = \varphi_2(g,p)$ gelten muss.

b) Untersuchen wir die lokale Situation: Wähle $p_0 \in M$. Nun finden wir U und V so, dass 3.12.c für φ_1 und φ_2 gilt. Wählen wir ein $p \in U$ und definieren $A_{p,i} := \alpha_{\varphi_i,p}(V)$. Dann sind $A_{p,1}$ und $A_{p,2}$ offene Untermannigfaltigkeiten von $S_{(\mathbf{1},p)}$ durch $(\mathbf{1},p)$. Also ist der Schnitt $A_p := A_{p,1} \cap A_{p,2}$ eine nichtleere offene Untermannigfaltigkeit von beiden. Mit der Argumentation wie oben können wir schließen, dass

$$W_p := \{g \in V : \varphi_1(g,p) = \varphi_2(g,p)\} = \left(\alpha_{\varphi_{1/2},p}\right)^{-1}(A_p)$$

offen in V ist. Offenbar ist W_p auch nichtleer und abgeschlossen in V, also $W_p = V$. Wir haben $\varphi_1 = \varphi_2$ auf $V \times U$ gezeigt, was den Beweis beendet, da p_0 beliebig war. $\square$

3.3 Rekonstruktion einer lokalen Transformationsgruppe

Nach diesem Ergebnis wäre man versucht, zu gegebenem τ eine Transformationsgruppe durch $\varphi(g,p) := p_M \circ p_{G,p}^{-1}(g^{-1})$ zu definieren. Dies wird im Allgemeinen keine globale Transformationsgruppe (denn $p_{G,p}$ ist meist weder injektiv noch surjektiv). Im Lokalen jedoch funktioniert eine solche Definition. Inwiefern sich eine lokale G-Transformationsgruppe ergibt, untersuchen wir im Folgenden.

Lemma 3.14. *Sei τ eine infinitesimale G-Transformationsgruppe auf M. Wir betrachten die Distribution $\mathcal{L}^\tau$ sowie die entsprechenden Untermannigfaltigkeiten $S_{(g,p)}$ (die wie oben definiert seien). Für gegebenes $p_0 \in M$ gibt es eine offene zusammenhängende symmetrische Umgebung V von $\mathbf{1}$, eine offene zusammenhängende Umgebung U von p_0 und eine analytische Abbildung $\psi : V \times U \to M$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

i) *$\psi(\mathbf{1},p) = p$ für alle p aus U.*

ii) *$(g,p) \mapsto (g, \psi(g^{-1},p))$ ist ein analytischer Diffeomorphismus von $V \times U$ auf eine offene Umgebung W von $(\mathbf{1},p_0)$.*

iii) *Für jedes p aus U ist die Abbildung $g \mapsto (g, \psi(g^{-1},p))$ ein analytischer Diffeomorphismus von V auf eine offene zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von $S_{(\mathbf{1},p)}$, die $(\mathbf{1},p)$ enthält.*

Beweis. Sei $n := \dim(G),\ m := \dim(M)$.
Zunächst wählen wir eine Karte $z = (z_1, \ldots, z_n)$ mit $z(\mathbf{1}) = 0$ für eine zusammenhängende Umgebung V' von $\mathbf{1}$ und eine Karte

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \underbrace{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}}_{x''})$$

auf $V' \times U'$ für eine zusammenhängende Umgebung U' von p_0 mit $x(\mathbf{1}, p_0) = 0$, so dass für alle $(g, p) \in V' \times U'$ gilt, dass

$$\{(g', p') \in V' \times U' : x_{n+1}(g', p') = x_{n+1}(g, p), \ldots, x_{n+m}(g', p') = x_{n+m}(g, p)\}$$

eine integrale Mannigfaltigkeit von $\mathcal{L}^\tau$ ist. Dies ist nach dem Frobeniustheorem ([Mü, 1.24]) möglich.

Jetzt definieren wir für $i \leq n,\ j \leq m$ und $(g, p) \in V' \times U'$:

$$\bar{z}_i(g, p) := z_i(g), \qquad \bar{w}_j(g, p) := w_j(p) := x_{n+j}(\mathbf{1}, p)$$

Wir wollen zeigen, dass $(\bar{z}, x'') = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ eine Karte in einer Umgebung von $(\mathbf{1}, p_0)$ ist. Da $(\bar{z}, x'')$ offenbar analytisch ist, genügt es nach dem Rangsatz ([Wo, 1.1]) (bzw. dem Satz über inverse Funktionen) zu zeigen, dass $D_0((\bar{z}, x'') \circ x^{-1})$ vollen Rang hat. Wir untersuchen also

$$\det(D_0((\bar{z}, x'') \circ x^{-1})) = \det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \det A$$

Falls A nicht vollen Rang hat, so gibt es einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = 0$. Über x^{-1} können wir aus $(v, 0)$ den entsprechenden Vektor $\nu \in T_{(\mathbf{1}, p_0)}(V' \times U')$ zurückgewinnen[3]. Für ihn gilt dann: $\nu \in \mathcal{L}^\tau_{(\mathbf{1}, p_0)}$[4], aber auch, dass seine Komponente bezüglich G gleich 0 ist (wegen $Av = 0$). Dies ist ein Widerspruch, da kein Element von $\mathcal{L}^\tau_{(\mathbf{1}, p_0)}$ als G-Komponente 0 haben kann (außer dem Nullvektor).

Das zeigt, dass $D((\bar{z}, x'') \circ x^{-1})$ auf einer Umgebung von 0 vollen Rang hat (da die Determinante stetig ist), also können wir den Rangsatz anwenden.

Wir wissen jetzt, dass $(\bar{z}, x'')$ eine Karte auf einer zusammenhängenden offenen Umgebung $V'' \times U''$ von $(\mathbf{1}, p_0)$ ist. Hieraus können wir sofort schließen, dass

$$w := (w_1, \ldots, w_m) = x''(\mathbf{1}, \cdot)$$

eine Karte auf U'' ist (da die anderen Komponenten von $(\bar{z}, x'')(\mathbf{1}, p)$ konstant sind).

Folglich ist auch $(\bar{z}, \bar{w})$ eine Karte auf $V'' \times U''$.

---

[3] Wir erhalten diesen Vektor (in der geometrischen Definition) als Äquivalenzklasse der Kurve $t \mapsto x^{-1}(x(\mathbf{1}, p_0) + t(v, 0)) = x^{-1}(t(v, 0))$.

[4] weil die Kurve in $S_{(\mathbf{1}, p_0)}$ verläuft, da die letzten m Koordinaten konstant sind.

Damit ist $\sigma := (\bar{z}, x'')^{-1} \circ (\bar{z}, \bar{w})$ als Transformation zwischen Karten ein analytischer Diffeomorphismus (auf sein Bild). Den Definitionsbereich müssen wir etwas weiter einschränken; er ist aber offen, also finden wir in ihm eine offene zusammenhängende Umgebung $V \times U$ von $(\mathbf{1}, p_0)$ mit $V = V^{-1}$. Für $(g, p) \in V \times U$ findet σ den Punkt (g', p'), der $(\bar{z}, x'')(g', p') = (\bar{z}, \bar{w})(g, p)$ erfüllt. Das heißt:

$$\sigma(g, p) = (g, f(g, p))$$

für eine analytische Funktion f. Jetzt definieren wir $\psi(g, p) := f(g^{-1}, p)$. Dann ist

$$\sigma(g, p) = (g, \psi(g^{-1}, p))$$

Die Eigenschaft $\psi(\mathbf{1}, p) = (\mathbf{1}, p)$ ist klar. Wir haben die Eigenschaften (i) und (ii) nachgewiesen.

Für festes $p \in U$ untersuchen wir die Abbildung $g \mapsto \sigma(g, p)$.
Es gilt $(\bar{z}, x'')(\sigma(g, p)) = (\bar{z}, \bar{w})(g, p)$, und somit für $j \leq m$:

$$x_{n+j}(\sigma(g, p)) = (\bar{z}, x'')_{n+j}(\sigma(g, p)) = (\bar{z}, \bar{w})_{n+j}(g, p) = x_{n+j}(\mathbf{1}, p)$$

Also ist $V_p := \sigma(V, p)$ eine Teilmenge von $S_{(\mathbf{1},p)}$. Da σ ein Diffeomorphismus ist (und die Dimension von V mit der Dimension von $S_{(\mathbf{1},p)}$ übereinstimmt), ist alles gezeigt. □

Theorem 3.15 (Fundamentalsatz von Lie). *Sei τ eine infinitesimale G-Transformationsgruppe auf M. Für jedes $p_0 \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von p_0 und eine lokale G-Transformationsgruppe φ auf U mit $\tau_\varphi(X) = \tau(X)|_U$.*

Beweis. Für gegebenes $p_0 \in M$ wählen wir V, U und ψ wie in obigem Lemma 3.14. Sei D die Menge derjenigen $(g, p) \in V \times U$, so dass $\psi(g, p) \in U$ ist. Dann ist D eine offene Umgebung von $\{\mathbf{1}\} \times U$. Wir definieren $\varphi = \psi|_D$, und wollen zeigen, dass φ eine lokale G-Transformationsgruppe auf U ist, die $\tau_\varphi(X) = \tau(X)|_U$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ erfüllt.

Für jedes $p \in U$ ist die Abbildung $g \mapsto (g, \varphi(g^{-1}, p))$ analytisch von V nach $S_{(\mathbf{1},p)}$. Somit gilt $(X_1, (d\varphi^p)_{\mathbf{1}}(X)) \in \mathcal{L}^\tau_{(\mathbf{1},p)}$ (nach derselben Rechnung wie in (3.5); da wir uns schon bei $\mathbf{1}$ befinden, müssen wir die Assoziativität noch nicht voraussetzen). Aufgrund der Definition von $\mathcal{L}^\tau_{(\mathbf{1},p)}$ bedeutet das schon $\tau_\varphi(X) = \tau(X)|_U$.

Nun müssen wir nur noch zeigen, dass es eine offene Umgebung von $\{\mathbf{1}\} \times \{\mathbf{1}\} \times U$ gibt, auf der φ assoziativ ist. Wählen wir also einen Punkt $p \in U$.

Zunächst finden wir eine offene zusammenhängende Umgebung $V' = (V')^{-1}$ von $\mathbf{1}$ und eine offene zusammenhängende Umgebung U' von p, so dass für $g, h \in V'$ und $p' \in U'$ die drei Punkte $p'' := \varphi(g^{-1}, p')$, $\varphi(h^{-1}g^{-1}, p')$, $\varphi(h^{-1}, \varphi(g^{-1}, p'))$ alle definiert sind.[5]

Wir wollen zeigen, dass in diesem Fall auch $\varphi(h^{-1}g^{-1}, p') = \varphi(h^{-1}, \varphi(g^{-1}, p'))$ gilt, was die Assoziativität beweist.

[5]Sich die technischen Details dieser Konstruktion zu überlegen ist eine leichte Übung.

Wir betrachten für $h \in V'$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha(h) &:= \alpha'(gh) && := (gh, \varphi(h^{-1}g^{-1}, p')) \\ \beta(h) &:= \lambda_g \underbrace{(h, \varphi(h^{-1}, p''))}_{\beta'(h)} && = (gh, \varphi(h^{-1}, p'')) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nach dem vorherigen Lemma ist α' ein analytischer Diffeomorphismus von gV' auf eine offene Untermannigfaltigkeit A von $S_{(\mathbf{1},p')}$. Also ist α ein analytischer Diffeomorphismus von V' auf A. Für β' schließen wir analog für V' und $S_{(\mathbf{1},p'')}$. Mit 3.12.a ist β ein analytischer Diffeomorphismus von V' auf eine offene Untermannigfaltigkeit B von $S_{(g,p'')}$.

A und B sind integrale Mannigfaltigkeiten von $\mathcal{L}^\tau$, und es ist $\alpha(\mathbf{1}) = (g, p'') = \beta(\mathbf{1})$. Somit ist $A \cap B$ eine nichtleere offene Untermannigfaltigkeit von A und B.

Sei $(g', q) \in A \cap B$, d.h. es gibt $h_\alpha, h_\beta \in V'$ mit $\alpha(h_\alpha) = \beta(h_\beta) = (g', q)$. Durch Vergleichen der ersten Komponente erkennt man, dass $h_\alpha = h_\beta$ gelten muss, folglich auch $\alpha(h_\alpha) = \beta(h_\alpha)$. Da α ein Diffeomorphismus ist, ist die Menge

$$W := \{h \in V' : \alpha(h) = \beta(h)\} = \alpha^{-1}(A \cap B)$$

als offen nachgewiesen. Sie ist jedoch offenbar abgeschlossen in V', also gilt $W = V'$. Dies weist die Assoziativität auf $V' \times U'$, einer Umgebung von $(\mathbf{1}, p)$ nach. Da p beliebig war, ist der Beweis beendet. □

Lies Theorem ist sowohl bezüglich G als auch bezüglich M lokal. Man interessiert sich natürlich für eine Globalisierung dieses Ergebnisses.

Theorem 3.16. *Sei τ ein infinitesimale G-Transformationsgruppe auf M. Dann gibt es eine lokale G-Transformationsgruppe φ auf M, so dass $\tau_\varphi = \tau$ gilt.*

Beweis. Nach Theorem 3.15 können wir zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung V_p von p und eine lokale G-Transformationsgruppe φ_{V_p} auf V_p finden, so dass $\tau_{\varphi_p}(X) = \tau(X)|_{V_p}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt. Die Mengen V_p bilden offenbar eine offene Überdeckung von M, und nach Lemma 3.4 können wir sie zu einer lokal endlichen offenen Überdeckung $\{U_i : i \in I\}$ verfeinern. Die zugehörigen lokalen G-Transformationsgruppen nennen wir entsprechend φ_i.

Nach dem Eindeutigkeitssatz 3.13 gilt für einen Punkt $p \in U_i \cap U_j$, dass $\varphi_i = \varphi_j$ auf einer Umgebung W_{ijp} von $\{\mathbf{1}\} \times U_{ijp} := \{\mathbf{1}\} \times (U_i \cap U_j)$ (in $G \times U_{ijp}$) gilt.

Wir sind jetzt in einer Situation, in der wir Lemma 3.6 anwenden und Umgebungen U_p mit den Eigenschaften wie in diesem Lemma finden können.

Definieren wir die endlichen Mengen $I(p) := \{i \in I : p \in U_i\}$, so sehen wir, dass die Menge

$$W_p := \{(g,p) \in G \times U_p : \forall i, j \in I(p) : \varphi_i(g,p) = \varphi_j(g,p)\} = (G \times U_p) \cap \bigcap_{i,j \in I(p)} W_{ijp}$$

eine offene Umgebung von $\{\mathbf{1}\} \times U_p$ (in $G \times U_p$) ist.
Wir definieren

$$\varphi_p := \varphi_i|_{W_p} \quad \text{für ein } i \in I(p)$$

(nach Definition von W_p ist die Wahl von i unerheblich).
Wir wollen auf $\bigcup W_p$ (einer offenen Umgebung von $\{\mathbf{1}\} \times M$) definieren:

$$\varphi(g,p) := \varphi_{p_0}(g,p) \quad \text{für } (g,p) \in W_{p_0}$$

Zu zeigen verbleibt nur, dass dieses φ wohldefiniert ist (d.h. die Definition von der Wahl des p_0 unabhängig ist).
Sei also $W_q \cap W_{q'}$ nicht leer. Dann ist $U_q \cap U_{q'}$ nicht leer, und wegen unserer Wahl der U_p gibt es ein $i \in I$ mit $U_q \cup U_{q'} \subset U_i$. Nun ist $i \in I(q) \cap I(q')$; also gilt

$$\varphi_q|_{W_q \cap W_{q'}} = \varphi_i|_{W_q \cap W_{q'}} = \varphi_{q'}|_{W_q \cap W_{q'}}$$

Damit ist gezeigt, dass φ eine lokale G-Transformationsgruppe auf M ist, die $\tau_\varphi = \tau$ erfüllt. □

3.4 Rekonstruktion einer globalen Transformationsgruppe

Für einige Fälle können wir jetzt schon eine stärkere Globalisierung nachweisen.

Theorem 3.17. *Wenn M kompakt und G einfach zusammenhängend ist, kann man für jede infinitesimale G-Transformationsgruppe τ auf M eine eindeutige globale G-Transformationsgruppe φ auf M finden, die $\tau_\varphi = \tau$ erfüllt.*

Beweis. Sei ψ eine lokale G-Transformationsgruppe auf M mit $\tau_\psi = \tau$ (nach Theorem 3.16). Wir können mit Lemma 3.1 eine Umgebung $V' = (V')^{-1}$ von $\mathbf{1}$ finden, so dass für alle $g, h \in V'$ und $p \in M$ gilt: $\psi(gh,p) = \psi(g, \psi(h,p))$ (und alle diese Punkte definiert sind). Für $h \in V'$ definieren wir mit $t_h(p) := \psi(h,p)$ eine analytische Abbildung von M nach M. Wegen $t_h \circ t_{h^{-1}} = id = t_{h^{-1}} \circ t_h$ sind die t_h sogar analytische Diffeomorphismen von M.

Da G einfach zusammenhängend ist, können wir einen Homomorphismus θ von G in die Gruppe der analytischen Diffeomorphismen von M finden, der auf einer Umgebung der $\mathbf{1}$ mit t übereinstimmt (nach [Ne, Prop. V.3.17, Monodromie Prinzip])[6]. Mit der Definition $\varphi(g,p) := \theta_g(p)$ erhalten wir eine globale G-Transformationsgruppe auf M. Die Abbildung φ ist analytisch auf $G \times M$, da sie auf einer Umgebung $V'' \times M$ (auf der sie mit ψ übereinstimmt) von $\mathbf{1}$ analytisch ist; V'' erzeugt G, also folgt mit der Assoziativität und einer leichten Induktion, dass φ überall analytisch ist. Alle anderen Eigenschaften sind klar. Insbesondere ist φ eindeutig nach dem Eindeutigkeitssatz 3.13. □

[6] Wir können nur dann ganz V' nehmen, wenn wir nachweisen, dass auch für alle Elemente h von $V'V'$ gilt, dass $p \mapsto \psi(h,p)$ ein analytischer Diffeomorphismus von M ist.

Beispiel 3.18. a) Wenn $G = (\mathbb{R}, +)$ ist, so wählt eine infinitesimale Transformationsgruppe (bis auf einen Vorfaktor) ein analytisches Vektorfeld auf M aus. Theorem 3.17 besagt, dass man im Falle einer kompakten Mannigfaltigkeit (z.B. S^n) von jedem Punkt aus integrale Kurven finden kann, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

b) Wenn $G = (\mathbb{R}, +)$ und $M = \mathbb{R}$ ist, so betrachten wir die folgende infinitesimale Transformationsgruppe:

$$\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{x_0} = \frac{-1}{\cos^2(\tan^{-1}(x_0))}\frac{\partial}{\partial x}$$

Die Transformationsgruppe hierzu (d.h. die integralen Kurven zu $-\tau(\frac{\partial}{\partial t})$) findet man als

$$\varphi(t, x_0) = \tan(t + \tan^{-1}(x_0))$$

und wir erkennen, dass diese nur für $t + \tan^{-1}(x_0) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ definiert sind.

c) Sei $G = S^1 \subset \mathbb{C}$ und $M = S^1$ (als reelle analytische Mannigfaltigkeit). Wir wählen für beide die Koordinatendarstellung $t \mapsto \exp(it)$ (das ist für jedes offene Intervall, das höchstens 2π lang ist, ein Homöomorphismus auf eine Teilmenge; man beachte, dass die Exponentialabbildung auch die Gruppenstruktur erhält). Bezüglich dieser Koordinatendarstellung wählen wir die infinitesimale Transformationsgruppe

$$\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{x_0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}$$

Wir wollen für eine mögliche Transformationsgruppe φ bestimmen, wie $\varphi(t, 0)$ aussieht. In der Koordinatendarstellung (eingeschränkt auf $(-\pi, \pi)$) erhalten wir

$$\varphi(t, 0) = \frac{t}{2}$$

Aus $\frac{-\pi}{2} = \lim_{t\to-\pi} \varphi(t, 0) \not\equiv \lim_{t\to\pi} \varphi(t, 0) = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$ folgt, dass diese Transformationsgruppe nicht zu einer globalen Transformationsgruppe fortgesetzt werden kann (und nach dem Eindeutigkeitsergebnis finden wir keinen besseren Kandidaten).
Geometrische Bedeutung: Die lokale Transformationsgruppe, die wir eben erhalten haben, ist die Wurzelfunktion. Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass man sie nur auf einem einfachzusammenhängenden Gebiet ohne 0 von $\mathbb{C}$ holomorph definieren kann, d.h. dass man einen Weg von 0 nach ∞ aus $\mathbb{C}$ herausnehmen muss. $\diamondsuit$

Diese Beispiele zeigen, dass die Voraussetzungen aus Theorem 3.17 nötig waren. Das Scheitern in Beispiel (c) bzw. die Einschränkung des Theorems auf einfach zusammenhängende Gruppen ist nicht schwerwiegend, da man erst zur universellen Überlagerung übergehen kann. Anschließend untersucht man, ob die gefundene Transformationsgruppe die nötigen Eigenschaften hat, um durch die Überlagerungsprojektion zu faktorisieren.

In Teil (b) war das Problem, dass die integralen Kurven des Vektorfelds sich nicht auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen ließen. Diese Eigenschaft ist jedoch sicherlich vonnöten, denn wenn es eine globale G-Transformationsgruppe φ gibt, dann ist für jedes $X \in \mathfrak{g}$ und $p \in M$ die Kurve

$$t \mapsto \varphi(\exp(-tX), p)$$

eine integrale Kurve für $\tau(X)$, die durch p geht und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Dies gibt Anlass zu den folgenden Definitionen[7]:

Definition 3.19. Ein Vektorfeld heißt *global* (oder *vollständig*), falls man in jedem Punkt eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte integrale Kurve finden kann.

Ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in eine Lie-Gruppe heißt *Einparametergruppe.*

Zu einem globalen Vektorfeld X definieren wir

$$\zeta_t(p) = \zeta(t,p) = f(-t), \text{ wobei } f \text{ die integrale Kurve von } X \text{ mit } f(0) = p \text{ ist.}$$

Dann ist für jedes globale Vektorfeld X und jedes $t \in \mathbb{R}$ durch

$$p \mapsto \zeta_t(p)$$

eine Einparametergruppe in die Gruppe der analytischen Diffeomorphismen von M gegeben. Eine Einparametergruppe von dieser Form nennen wir von X *erzeugt* und X den *infinitesimalen Erzeuger* dieser Einparametergruppe (offenbar muss ein infinitesimaler Erzeuger insbesondere global sein).

Bemerkung 3.20. Eine Abbildung ζ wie oben ist als Abbildung $\mathbb{R}\times M \to M$ analytisch.

Beweis. Nach Theorem 3.16 gibt es für $\tau(\frac{\partial}{\partial t}) = X$ eine lokale $\mathbb{R}$-Transformationsgruppe φ auf M für die $\tau_\varphi = \tau$ gilt. Dieses φ ist analytisch und muss mit $\zeta|_{D_\varphi}$ übereinstimmen. Mit $\zeta(t'+t,p) = \zeta(t', \zeta(t,p))$ und weil $\zeta(t,\cdot)$ ein analytischer Diffeomorphismus von M ist, folgt, dass ζ in jedem Punkt (t,p) analytisch ist. $\square$

In dem verbleibenden Teil dieses Textes wollen wir zeigen, dass für eine einfach zusammenhängende Gruppe G unser Scheitern in Beispiel 3.18.b im Wesentlichen der einzige Defekt ist, der auftreten kann: Denn zu jeder infinitesimalen G-Transformationsgruppe τ, für die jedes $\tau(X)$ global ist, kann eine globale G-Transformationsgruppe φ gefunden werden, für die $\tau_\varphi = \tau$ gilt.

[7] Diese sind auch in anderen Bereichen der Differentialgeometrie von Bedeutung.

Lemma 3.21. *Sei ζ die von $Z \in \mathcal{X}_a(M)$ erzeugte Einparametergruppe. Für $X \in \mathfrak{g}$ gilt $\tau(X) = Z$ genau dann, wenn für jeden Punkt $p \in M$ die Kurve*

$$t \mapsto f(t) := (\exp(tX), \zeta_{-t}(p))$$

ganz in $S_{(\mathbf{1},p)}$ verläuft.

Beweis. Angenommen, es gilt $f(t) \in S_{(\mathbf{1},p)}$ für alle t. Es folgt sofort, dass $(X_1, Z_p) = \left(\frac{d}{dt} f(t)\right)_0 \in \mathcal{L}^\tau_{(\mathbf{1},p)}$ gilt, woraus wir $Z_p = \tau(X)_p$ schließen.

Sei umgekehrt $Z = \tau(X)$. Für das analytische Vektorfeld $\bar{Z}_{(g,q)} := (X_g, Z_q)$ auf $G \times M$ gilt, dass $\bar{Z}|_{S_{(\mathbf{1},p)}}$ ein analytisches Vektorfeld auf $S_{(\mathbf{1},p)}$ ist.

Betrachten wir ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(t_0) \in S_{(\mathbf{1},p)}$. Aufgrund der Existenz von integralen Kurven finden wir eine Funktion $\bar{f} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_{(\mathbf{1},p)}$ mit $\bar{f}(0) = f(t_0)$ und $\left(\frac{d}{dt}\bar{f}\right)_t = \bar{Z}_{\bar{f}(t)}$. Da integrale Kurven eindeutig sind, gilt $f(t + t_0) = \bar{f}(t)$ für alle $|t| < \varepsilon$. Das zeigt, dass die Menge $\{t : f(t) \in S_{(\mathbf{1},p)}\}$ offen in $\mathbb{R}$ ist. Aufgrund der Stetigkeit von f ist sie auch abgeschlossen, also ganz $\mathbb{R}$. $\square$

Lemma 3.22. *Seien $X_1, \dots, X_l \in \mathfrak{g}$ und $\tau(X_i)$ sei ein globales Vektorfeld für alle i. Wir nennen die von $\tau(X_i)$ erzeugte Einparametergruppe ζ^i. Für $(t_1, \dots, t_l) \in \mathbb{R}^l$ definieren wir*

$$\zeta_{(t_1,\dots,t_l)} := \zeta^1_{t_1} \circ \dots \circ \zeta^l_{t_l}$$

Dann ist

$$\Phi(t_1, \dots, t_l, p) := \Big(\exp(t_1X_1) \cdots \exp(t_lX_l), \zeta^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)}(p)\Big)$$

eine analytische Abbildung von $\mathbb{R}^l \times M$ nach $G \times M$ und es gilt $\Phi(\mathbb{R}^l, p) \subset S_{(\mathbf{1},p)}$ für alle $p \in M$.

Beweis. Zunächst ist Φ analytisch (vgl. Bemerkung 3.20). Wir wollen die anderen Aussagen mittels Induktion über l beweisen. Der Induktionsanfang $l = 1$ ist gerade Lemma 3.21. Sei also $l > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
\Big(\exp(t_2X_2) \cdots \exp(t_lX_l), \zeta^{-1}_{(t_1,\dots,t_l)}(p)\Big) &= \big(\exp(t_2X_2) \cdots \exp(t_lX_l), \zeta^l_{-t_l} \circ \cdots \zeta^2_{-t_2} \circ \zeta^1_{-t_1}(p)\big) \\
&= \big(\exp(t_2X_2) \cdots \exp(t_lX_l), \zeta^l_{-t_l} \circ \cdots \zeta^2_{-t_2}(\zeta^1_{-t_1}(p))\big) \\
&\in S_{(1,\zeta^1_{-t_1}(p))}
\end{aligned}$$

und mit 3.12.a erhalten wir

$$\Phi(t_1, \dots, t_l, p) \in S_{(\exp(t_1X_1), \zeta^1_{-t_1}(p))} \underset{\text{L. 3.21}}{=} S_{(\mathbf{1},p)}$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Lemma 3.23. *Sei τ eine infinitesimale G-Transformationsgruppe auf M, so dass $\tau(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ global ist. Dann ist $p_{G,p}$ (vgl. Def. 3.11) für jedes $p \in M$ eine Überlagerung von $S_{(\mathbf{1},p)}$ auf G.*

Beweis. Wir werden den Beweis in folgenden Schritten durchführen:

i) Wir finden eine offene zusammenhängende symmetrische Umgebung V von $\mathbf{1}$, für die $p_{G,p}^{-1}$ einen Homöomorphismus zu der Zusammenhangskomponente von $p_{G,p}^{-1}(V)$ induziert, die $(\mathbf{1}, p)$ enthält.

ii) Dann zeigen wir die Surjektivität von $p_{G,p}$.

iii) Zuletzt zeigen wir, dass für jedes Element g von G seine Umgebung gV homöomorph zu jeder Zusammenhangskomponente $\tilde{V}$ von $p_{G,p}^{-1}(gV)$ ist (wobei der Homöomorphismus durch $p_{G,p}|_{\tilde{V}}$ gegeben ist).

Zu den Details:

i) Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Dann ist die Abbildung

$$\Psi : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

ein analytischer Diffeomorphismus von einer Umgebung des Ursprungs in $\mathbb{R}^n$ auf eine $\mathbf{1}$-Umgebung in G. Unter Verwendung des vorherigen Lemmas 3.22 schließen wir auf die Existenz einer offenen zusammenhängenden symmetrischen $\mathbf{1}$-Umgebung V in G, so dass (mit den Bezeichnungen des vorigen Lemmas)

$$\alpha_p(g) := \Phi(\Psi^{-1}(g), p) = (g, \psi(g, p)) \quad g \in V \tag{3.7}$$

auf V ein analytischer Diffeomorphismus nach $S_{(\mathbf{1},p)}$ ist. Man beachte insbesondere zur späteren Verwendung, dass ψ analytisch auf $V \times M$ ist. Wenn wir $V^p := \alpha_p(V)$ definieren, so sehen wir, dass V^p eine offene Untermannigfaltigkeit von $S_{(\mathbf{1},p)}$ ist (die Offenheit folgt, weil beide Mannigfaltigkeiten gleiche Dimension haben). Insbesondere ist α_p ein Homöomorphismus auf V^p. Nach Lemma 3.2 ist V^p eine Zusammenhangskomponente von $p_{G,p}^{-1}(V)$. Es ist nun klar, dass V^p den Punkt $(\mathbf{1}, p)$ enthält, und dass $p_{G,p}|_{V^p}$ ein Homöomorphismus von V^p auf V ist.

ii) Da V die analytische Gruppe G erzeugt (Lemma 3.7), können wir die Surjektivität per Induktion nachweisen: Wir wissen bereits, dass $p_{G,p}(S_{(\mathbf{1},p)})$ die Menge V enthält. Nehmen wir also an, dass $p_{G,p}(S_{(\mathbf{1},p)}) \supset V^k$ für alle $p \in M$ gilt.

Ein $g \in V^{k+1}$ können wir als $g'h$ mit $g' \in V$, $h \in V^k$ schreiben. Für festes $p \in M$ wählen wir ein $q \in M$, so dass $(g', q) \in S_{(\mathbf{1},p)}$ gilt (dies können wir nach (i) tun); nun gilt $S_{(g',q)} = S_{(\mathbf{1},p)}$. Nach der Induktionsannahme gibt es ein $q' \in M$, so dass $(h, q') \in S_{(\mathbf{1},q)}$ liegt. Nun folgt

$$(g, q') = (g'h, q') \underset{3.12.\mathrm{a}}{\in} S_{(g',q)} = S_{(\mathbf{1},p)}$$

iii) Für festes $g \in G$ und $p \in M$ wählen wir eine Zusammenhangskomponente $\tilde{V}$ von $p_{G,p}^{-1}(gV)$ und zeigen, dass $p_{G,p}|_{\tilde{V}}$ ein Homöomorphismus auf gV ist. Sei (g,q) ein Element von $\tilde{V}$. Nach Definition ist $S_{(\mathbf{1},p)} = S_{(g,q)} = \lambda_g S_{(\mathbf{1},q)}$. Damit ist klar, dass λ_g einen Homöomorphismus von $p_{G,q}^{-1}(V)$ auf $p_{G,p}^{-1}(gV)$ darstellt, und dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} gV & p_{G,p}^{-1}(gV) \arrow[l, "p_{G,p}"'] \\ V \arrow[u, "l_g"] & p_{G,q}^{-1}(V) \arrow[l, "p_{G,q}"] \arrow[u, "\lambda_g"'] \end{tikzcd}$$

Wir haben V^q als diejenige Zusammenhangskomponente von $p_{G,q}^{-1}(V)$ eingeführt, die $(\mathbf{1},q)$ enthält, und gesehen, dass $p_{G,q}$ einen Homöomorphismus von V^q auf V induziert. Somit ist $\tilde{V} = \lambda_g(V^q)$ und $p_{G,p}$ ist ein Homöomorphismus von $\tilde{V}$ auf gV, was den Beweis beendet. □

Theorem 3.24. *Sei τ eine infinitesimale G-Transformationsgruppe auf M. Wenn G einfach zusammenhängend und $\tau(X)$ global für alle $X \in \mathfrak{g}$ ist, dann gibt es genau eine globale G-Transformationsgruppe φ auf M, so dass $\tau_\varphi = \tau$ gilt.*

Beweis. Da G einfach zusammenhängend ist, sehen wir mit dem letzten Lemma, dass $p_{G,p}$ für jedes $p \in M$ ein Homöomorphismus von $S_{(\mathbf{1},p)}$ nach G ist. Wenn wir

$$\varphi(g^{-1},p) = q, \quad \text{so dass } (g,q) \in S_{(\mathbf{1},p)} \text{ gilt},$$

definieren, so ist φ wohldefiniert.

Wir müssen die Eigenschaften einer globalen Transformationsgruppe nachweisen. Offenbar gilt $\varphi(\mathbf{1},p) = p$.

Für $g,h \in G$ und $p \in M$ sei $q := \varphi(g^{-1},p)$. Dann ist $(g,q) \in S_{(\mathbf{1},p)} = S_{(g,q)} = \lambda_g S_{(\mathbf{1},q)}$. Wegen

$$(gh, \varphi(h^{-1}g^{-1},p)) \in S_{(\mathbf{1},p)}$$

gilt

$$(h, \varphi(h^{-1}g^{-1},p)) \in S_{(\mathbf{1},q)}$$

Da auch $(h,\varphi(h^{-1},q)) \in S_{(\mathbf{1},q)}$ gilt, folgt schon

$$\varphi(h^{-1}g^{-1},p) = \varphi(h^{-1},q) = \varphi(h^{-1},\varphi(g^{-1},p)) \tag{3.8}$$

Das zeigt die Assoziativität.

Zu zeigen verbleibt, dass φ analytisch ist und dass $\tau_\varphi = \tau$ gilt.

Um zu zeigen, dass φ analytisch ist, schließen wir für $g \in V$ aus dem Beweis des vorigen Lemmas (Gleichung (3.7))

$$(g, \varphi(g^{-1}, p)) = \alpha_p(g)$$

und somit, dass φ analytisch auf $V \times M$ ist. Mit der Assoziativität kann man per Induktion schließen, dass φ auf allen $V^k \times M$ analytisch ist. Das zeigt, dass φ analytisch auf $G \times M$ ist, da G von V erzeugt wird (Lemma 3.7).

Sei jetzt $p \in M$ und $X \in \mathfrak{g}$. Wenn wir $Y = \tau_\varphi(X)_p = (d\varphi^p)_{\mathbf{1}}(X) \in T_p(M)$ (vgl. (3.1) und (3.2)) definieren, dann ist $(X_1, Y) = (d\alpha_p)_{\mathbf{1}}(X) \in \mathcal{L}^\tau_{(\mathbf{1},p)}$, da α_p eine analytische Abbildung nach $S_{(\mathbf{1},p)}$ ist. Somit gilt $Y = \tau(X)_p$, was den Beweis beendet (da die Eindeutigkeit aus 3.13 bekannt ist). □

In [Pa] wird noch gezeigt, dass man in obigem Theorem die Voraussetzung, dass $\tau(X)$ global sei auf eine erzeugende Teilmenge von $\mathfrak{g}$ einschränken kann. Aus unserem Beweis geht schon hervor, dass es ausreichend ist, wenn eine Basis von $\mathfrak{g}$ diese Eigenschaft hat. Die verbleibenden Schritte sind nicht mehr allzu schwer (sie werden in [Va] als Übungsaufgabe gestellt).

Schlussbemerkungen:

- Von der Beweistechnik und der Aussage her könnte man meinen, dass Satz 3.17 getrennt neben Theorem 3.24 steht. Dies ist aber nicht so:

Lemma 3.25. *Jedes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist global.*

Beweis. Übung. □

- Im Wesentlichen beschreibt eine infinitesimale Transformationsgruppe eine analytische involutive Distribution. Die oben entwickelte Theorie befasst sich damit, inwiefern man deren integrale Mannigfaltigkeiten als Bahnen einer Gruppenwirkung parametrisieren kann.

- In der Situation, wenn man eine Darstellung einer Lie-Algebra auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ integrieren will, kann man obige Theorie anwenden.

Literaturverzeichnis

[Wo] Christoph Wockel: *Grundlagen über Mannigfaltigkeiten*, 2001
`http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~balser/Papers.html`
Seminarausarbeitung zur Einführung in die Differentialgeometrie als Grundlage für die folgenden Vorträge von Christoph Müller, Christoph Wockel und mir.

[Mü] Christoph Müller: *Homogene Räume und Bahnräume von Lie-Gruppen*, 2001
`http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~balser/Papers.html`
Seminarausarbeitung, die auf [Wo] aufbaut und den zweiten Teil der Grundlagen enthält.

[Ne] K.H. Neeb: *Lie-Gruppen und Matrizengruppen,* 2001
`http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/ags/ag5/mitglieder/professoren/neeb.html#Skripten`
Skript zur gleichnamigen Vorlesung im Sommersemester 2001 an der TU Darmstadt.

[Pa] R.S. Palais: *A global formulation of the Lie theory of transformation groups,* Memoirs of the American Mathematical Society, Number 22, 1957

[Sp] Michael Spivak: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume one*, Publish or Perish, Inc., 1999
Eine ausführliche Einführung in das Thema. Es wird wenig Vorwissen aus anderen Gebieten vorausgesetzt (das gilt auch für Topologie).

[Va] V.S. Varadarajan: *Lie Groups, Lie Algebras and their Representations*, Graduate Texts in Mathematics 102, Springer, 1984
Dies ist meine Hauptquelle. Die in dieser Seminararbeit dargestellten Ideen lehnen sich stark an der Präsentation des Themas in Kapitel 2.16 an.